

تست از فصول صفر و یک دیفرانسیل:

۱- حاصل کسر $\frac{0/692}{0/1 + 0/235}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{692}{235}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\frac{692}{235}$

۲- اگر $A = 1/363636\dots$ باشد، حاصل $(\frac{1}{A} + \frac{3}{5})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۳- اگر $A = 0/345$ آنگاه $11A$ کدام است؟

- (۱) $3/6$ (۲) $3/8$ (۳) $3/5$ (۴) $3/7$

۴- اگر $A = 0/5242$ ، آنگاه $\frac{9}{10A - 5}$ کدام است؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۳۷ (۳) ۲۸ (۴) ۳۹

۵- چند بسط اعشاری متناوب به صورت $0/\overline{ab}$ با شرط $1 \leq b \leq 8$ و $\frac{2a}{15} = \overline{ab}$ وجود دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶- اگر $\frac{b}{8a} = 0/\overline{ab}$ باشد، $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۷- اگر a^3 عددی گویا و b^5 عددی گنگ باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $a^2 + b^{10}$ گویاست (۲) $a^3 b^5$ گنگ است (۳) $a^3 + b^5$ گویاست (۴) $\frac{a^6 + 1}{b}$ گنگ است

۸- در همسایگی محذوف متقارن به صورت $\{3\} - (3a - 7, a + 5)$ ، شعاع همسایگی، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹- روی محور اعداد حقیقی دو عدد وجود دارند که فاصله آنها از نقطه ۴، سه برابر فاصله آنها از نقطه $\frac{5}{3}$ است، مجموع دو عدد کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{4}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{11}{4}$ (۴) $\frac{13}{4}$

۱۰- مجموعه جواب نامعادله $0 \leq (x^2 + |x| + 3)(x^4 - 81)$ در Z چند عضو دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۶

۱۱- اگر مجموعه‌ی جواب نامعادله $1 < \max\{(2x - 5), (5 - 2x)\}$ یک بازه‌ی متقارن به مرکز a و شعاع r باشد، $a + r$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\frac{7}{2}$

۱۲- در دنباله‌ی اعداد $1, \frac{-1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{-3}{4}, \dots$ ، نسبت جمله‌ی نود و نهم به جمله‌ی صدم، کدام است؟

- (۱) -50 (۲) -51 (۳) $-\frac{1}{51}$ (۴) $-\frac{1}{50}$

۱۳- در دنباله‌ی $a_n = \frac{n}{16} + (-\frac{1}{2})^n$ چند جمله‌ی منفی وجود دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) ۴

۱۴- در دنباله‌ی اعداد $2, 8, 24, \dots$ ، مجموع جملات $(n-1)$ ام و n ام کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $(3n-1)2^{n-1}$ (۲) $(3n+1)2^{n-1}$ (۳) $(3n-1)2^n$ (۴) $(3n+1)2^n$

۱۵- جملات یک دنباله، با جمله‌ی عمومی $a_n = a + b^{2n-1}$ (a و b عدد ثابت و مثبت)، به صورت $5, 11, 35, \dots$ هستند، جمله‌ی چهارم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۱۳۱ (۲) ۱۲۸ (۳) ۵۷ (۴) ۱۴۲

۱۶- اگر $S_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$ ، آنگاه دنباله‌ی با جمله‌ی عمومی S_n چگونه است؟

- (۱) صعودی - بیکران (۲) نزولی - بیکران (۳) صعودی - کراندار (۴) نزولی - کراندار

۱۷- در دنباله‌ای، رابطه‌ی بازگشتی $a_{n+1} = 2a_n - 5$ برقرار است. اگر جمله‌ی دوازدهم مساوی ۱۷ باشد، جمله‌ی دهم آن کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۱۸- دنباله‌ی $u_n = n \left(\frac{2}{3}\right)^n$ برای $n \geq 2$ چه نوع دنباله‌ای است؟

- (۱) صعودی - کراندار از بالا و پایین (۲) نزولی - کراندار از بالا و پایین (۳) صعودی - فقط از پایین کراندار (۴) نزولی - فقط از بالا کراندار

۱۹- مجموع 250 جمله‌ی اول از دنباله‌ی $\left\{ \cos \frac{n\pi}{3} \right\}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) صفر

۲۰- در دنباله‌ی $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ($n \geq 3$) داریم $a_1 = 1$ و $a_2 = 3$ ، مجموع 100 جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱

پاسخ ها:

۱- گزینه «۲»

$$\begin{aligned} \overline{0/692} &= \frac{692}{999}, \quad \overline{0/1} = \frac{1}{9}, \quad \overline{0/235} = \frac{235}{999} \\ \Rightarrow \overline{0/692 + 0/235} &= \frac{692}{999} + \frac{235}{999} = \frac{692 + 235}{999} = \frac{927}{999} = \frac{31}{33} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

۲- گزینه «۳»

$$A = \overline{1/36} = 1 + \frac{36}{99} = 1 + \frac{4}{11} = \frac{15}{11}$$

بنابراین:

$$\frac{1}{A} + \frac{3}{5} = \frac{11}{15} + \frac{3}{5} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

۳- گزینه «۲»

$$A = \overline{0/345} = \frac{345 - 3}{990} = \frac{342}{990} \Rightarrow A = \frac{38}{110} \Rightarrow 11A = 38/10$$

۴- گزینه «۲»

$$\begin{aligned} \overline{0/5243} = A &\rightarrow 10A = 5 + \overline{0/243} \rightarrow 10A - 5 = \overline{0/243} \\ 10A - 5 &= \frac{243}{999} = \frac{27}{111} \rightarrow \frac{1}{10A - 5} = \frac{111}{27} \Rightarrow \frac{9}{10A - 5} = \frac{111}{3} = 37 \end{aligned}$$

۵- گزینه «۲»

$$\begin{aligned} \overline{0/ab} &= \frac{2a}{15} \xrightarrow{\times 10} a/\overline{b} = \frac{4a}{3} \\ \Rightarrow a + \frac{b}{9} &= \frac{4a}{3} \xrightarrow{\times 9} 9a + b = 12a \\ \Rightarrow b &= 3a \end{aligned}$$

پس دو بسط اعشاری متناوب وجود دارد.

۶- گزینه «۴»

$$\overline{0/8a} = \frac{b}{6} \Rightarrow \frac{8a - 8}{90} = \frac{b}{6} \Rightarrow \frac{80 + a - 8}{90} = \frac{b}{6}$$

$$\Rightarrow a = 3(\Delta b - 24) \Rightarrow \text{a مضرب 3 است.}$$

به ازای $a = 0, 6, 9$ جواب برای b به دست نمی آید. اما به ازای $a = 3$ خواهیم داشت: $b = 5$ و از آنجا $a + b = 8$.

۷-گزینه «۴»

اگر a^3 گویا باشد و b^5 گنگ باشد، $a^2 + b^1$ لزوماً گویا نیست، چون b^1 ممکن است گویا یا گنگ باشد. (در نظر بگیرید $b^5 = \sqrt[5]{2}$ و $b^5 = \sqrt{2}$).
 درگزینه‌های «۲» و «۳» چون ممکن است $a^3 = 0$ (گویا) باشد آنگاه $a^3 b^5$ گویا و $a^3 + b^5$ گنگ می‌شود، اما اگر b^5 گنگ باشد b نیز گنگ است و اگر a^3 گویا باشد a^6 نیز گویا است. پس $a^6 + 1$ عددی گویا و غیرصفر خواهد بود، لذا $\frac{a^6 + 1}{b}$ گنگ خواهد بود.

۸-گزینه «۴»

در همسایگی محذوف متقارن $\{3\} - (3a - 7, a + 5)$ ، مرکز همسایگی ۳ است، بنابراین داریم:

$$3 = \frac{(3a - 7) + (a + 5)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4a - 2}{2} = 3 \Rightarrow 2a - 1 = 3 \Rightarrow a = 2$$

حال شعاع همسایگی را به دست می‌آوریم:

$$r = \frac{(a + 5) - (3a - 7)}{2} \xrightarrow{a=2} r = \frac{7 - (-1)}{2} = 4$$

۹-گزینه «۳»

$$|x - 4| = 3 \left| x - \frac{5}{3} \right| \Rightarrow x - 4 = \pm 3 \left(x - \frac{5}{3} \right)$$

$$\begin{cases} x - 4 = 3 \left(x - \frac{5}{3} \right) \rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \\ x - 4 = -3 \left(x - \frac{5}{3} \right) \rightarrow x_2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + \frac{9}{4} = \frac{11}{4}$$

۱۰-گزینه «۳»

عبارت $x^4 + |x| + 3$ همواره مثبت است پس باید $x^4 - 81 \leq 0$ بنابراین:

$$x^4 \leq 81 \Rightarrow x^4 \leq 3^4 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$\Rightarrow Z \text{ تعداد در } = 3 - (-3) + 1 = 7$$

۱۱-گزینه «۳»

با توجه به تعریف قدر مطلق $|x| = \max\{x, -x\}$ ، پس:

$$|2x - 5| < 1 \rightarrow \left| x - \frac{5}{2} \right| < \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{5}{2}, r = \frac{1}{2} \rightarrow a + r = 3$$

۱۲- گزینه ۲

جمله‌ی عمومی را می‌نویسیم:

$$a_{2n-1} = n \quad (\text{جملات ردیف فرد})$$

$$\xrightarrow{2n-1=99} n = 50 \Rightarrow a_{99} = 50$$

$$a_{2n} = \frac{-n}{n+1} \quad (\text{جملات ردیف زوج})$$

$$\xrightarrow{2n=100} n = 50 \Rightarrow a_{100} = -\frac{50}{51}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{99}}{a_{100}} = -51$$

۱۳- گزینه ۳

جمله‌های با شماره‌ی زوج در این دنباله مثبت‌اند، چند جمله‌ی ابتدایی با شماره‌ی فرد را به‌دست می‌آوریم:

$$a_n = \frac{n}{16} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{16} - \frac{1}{2} = -\frac{7}{16} \\ a_3 = \frac{3}{16} - \frac{1}{8} = \frac{1}{16} \\ a_5 = \frac{5}{16} - \frac{1}{32} = \frac{9}{32} \\ \vdots \end{cases}$$

بنابراین، در این دنباله، فقط جمله‌ی a_1 منفی است.

۱۴- گزینه ۱

به ازای $n = 2$ ، باید $a_1 + a_2 = 10$ یعنی $2 + 8 = 10$ به‌دست آید، بنابراین در گزینه‌ها به ازای $n = 2$ ، در گزینه‌ی (۱) تنها مجموع برابر ۱۰ خواهد بود. توجه کنید که در صورت سؤال گفته نشده دنباله‌ی هندسی، پس نمی‌توانیم دنباله را هندسی در نظر بگیریم.

۱۵- گزینه ۱

$$a_n = a + b^{2n-1} \xrightarrow{n=1} (1) a_1 = a + b = 5 \quad \xrightarrow{n=2} (2) a_2 = a + b^3 = 11$$

$$\xrightarrow{n=3} (3) a_3 = a + b^5 = 35$$

$$(2) \text{ و } (1) : b(b^2 - 1) = 6$$

$$(3) \text{ و } (2) : b^3(b^2 - 1) = 24$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم}} b^2 = 4 \xrightarrow{b>0} b = 2 \rightarrow a = 3$$

بنابراین:

$$a_4 = a + b^7 = 3 + 2^7 = 131$$

۱۶- گزینه ۴

$$S_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} \Rightarrow S_n = \frac{n^2+n}{2n^2}$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$



از آنجایی که $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$ ، پس دنباله همگرا و در نتیجه کران دار است، از طرفی با افزایش n ، کاهش می‌یابد، لذا کل کسر کاهش یافته و در نتیجه دنباله نزولی است.

۱۷- گزینه ۲

$$n = 11 \rightarrow a_{12} = 2a_{11} - 5 \rightarrow 17 = 2a_{11} - 5 \rightarrow a_{11} = 11$$

$$n = 10 \rightarrow a_{11} = 2a_{10} - 5 \rightarrow 11 = 2a_{10} - 5 \rightarrow a_{10} = 8$$

۱۸- گزینه ۲

ابتدا چند جمله‌ی اول دنباله را می‌نویسیم:

$$u_n = n \left(\frac{2}{3} \right)^n \Rightarrow u_n > 0$$

$$u_2 = 2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \Rightarrow u_2 = \frac{8}{9}$$

$$u_3 = 3 \left(\frac{2}{3} \right)^3 \Rightarrow u_3 = \frac{8}{9}$$

$$u_4 = 4 \left(\frac{2}{3} \right)^4 \Rightarrow u_4 = \frac{64}{81}$$

با توجه به جملات، دنباله نمی‌تواند صعودی باشد، پس با توجه به گزینه‌ها دنباله نزولی می‌شود و چون دنباله دارای کران پایین است (جملات همواره مثبت هستند) و هر دنباله‌ی نزولی که کران پایین دارد همگرا می‌شود، الزاماً دنباله همگرا است. پس کراندار نیز می‌باشد، یعنی کران پایین و بالا دارد.

۱۹- گزینه ۱

با نوشتن جملات این دنباله دیده می‌شود که مجموع شش جمله‌ی اول آن صفر است.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\ = \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \pi + \cos \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{3} + \cos 2\pi = 0$$

پس با شروع از جمله‌ی اول با دوره‌ی تناوب (۶)، مجموع هر شش جمله صفر است لذا:

$$250 \div 6 \rightarrow 4 \text{ باقی‌مانده}$$

لذا باید مجموع چهار جمله‌ی اول را فقط حساب کنیم:

$$= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{-3}{4}$$

۲۰- گزینه ۱

با استفاده از رابطه‌ی داده شده خواهیم داشت:

$$1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2$$

دیده می‌شود که مجموع ۶ جمله‌ی اول صفر است، بنابراین:

$$S_{100} = \underbrace{S_{96}}_0 + (a_{97} + a_{98} + a_{99} + a_{100})$$

$$S_{100} = 0 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \Rightarrow S_{100} = 1 + 3 + 2 - 1 = 5$$