تابع

مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که هیچ دو عضو متفاوت آن دارای مؤلفه‌های یکسان نباشند، به عبارت دیگر اگر زوج مرتب‌های $(x,y),(x,y')$ متعلق به تابع f باشند، داریم:

$$(x,y'),(x,y)\in f \Rightarrow y=y'$$

تذکر: این بدان معنی است که اگر دو زوج مرتب که دارای مؤلفه‌های اول یکسان باشند باید مؤلفه‌های دوم آن نیز با هم برابر باشند.

مثال۱: به ازای کدام مقدار a، $f=\{(۱,۲),(a,۳),(۴,۰),(۴,a^۲-۱)\}$ ضابطه‌ی یک تابع است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۱- یا ۱ ٤) صفر

$a^۲-۱=۰ \Rightarrow a=\pm ۱$

اگر $a=۱$ آن‌گاه $(۱,۳)\in f$ و $(۱,۲)\in f$ که در این صورت f تابع نمی‌باشد. بنابراین فقط $a=-۱$ قابل قبول است.

مثال۲: اگر مجموعه $\{(۱,۲),(-۱,m-۱),(-۱,۲m)\}$ تابع باشد m کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ٤) ۱-

$$\begin{matrix}(-۱,m-۱)\\(-۱,۲m)\end{matrix} \Rightarrow m-۱=۲m \Rightarrow m=-۱$$

مثال۳: به ازای کدام مقدار a رابطه زیر بیانگر یک تابع است؟

$$f=\{(۲,۵),(۳,-۱),(۲a+۴,۵),(۶,۷)\}$$

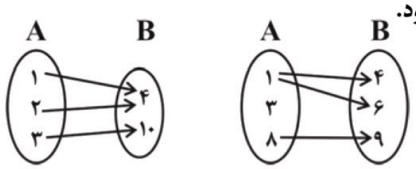
۱) $a\in\{-۱\}$ ۲) $a\in\mathbb{R}-\{-۱\}$ ۳) $a\in\{-\frac{۱}{۲},۱\}$ ٤) $a\in\mathbb{R}-\{-\frac{۱}{۲},۱\}$

گزینه ۴ صحیح است.

نمایش‌های گوناگون یک تابع

۱) تابع از دید نمودار پیکانی:

در نمودار پیکانی تابع از هر عضو مجموعه‌ی اول نبایستی از یک پیکان بیش‌تر خارج شود.



تابع است تابع نیست

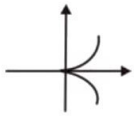
۲) تابع از دید نمودار مختصاتی:

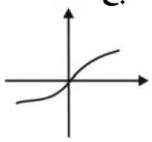
در نمودار مختصاتی تابع هر خط موازی محور yها نبایستی نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند.

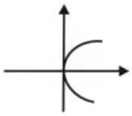
۳) تابع از دید ضابطه:

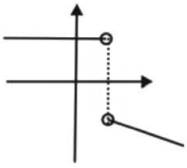
هرگاه ضابطه‌ی رابطه‌ی f مفروض باشد برای تشخیص تابع بودن آن با استفاده از ضابطه، y را بر حسب x به دست می‌آوریم. اگر به ازای هر x یک y حاصل شود، ضابطه یک تابع است و در غیر این صورت تابع نیست. (x متغیر و y تابع است.)

☺مثال۴: کدام یک از اشکال زیر یک تابع است؟

۱) 

۲) 

۳) 

٤) 

تشخیص تابع از روی نمودار باید یک خط موازی محور y ها کنیم و حداکثر نمودار را در یک نقطه قطع کند.بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

مثال۵: کدام یک از روابط زیر یک تابع است؟

۱) $y^{۲}-۲y+۱=\cos x$

$$(y-۱)^{۲}=\cos x \Rightarrow y=۱\pm\sqrt{\cos x} \xrightarrow{x=۰} y=۲\ ,\ \ y=۰$$

به ازای $x=۰$ دو مقدار $y=۰$ و $y=۲$ بدست آمده لذا رابطه‌ی فوق تابع نیست.

۲) $[x][y]=۵$

۳) $۵x^{۲}+y^{۲}+۴xy+۴x+۴=۰$

ابتدا رابطه‌ی فوق را مرتب می‌کنیم.

$$۴x^{۲}+۴xy+y^{۲}+x^{۲}+۴x+۴=۰ \Rightarrow (۲x+y)^{۲}+(x+۲)^{۲}=۰$$

با توجه به این نکته که مجموع چند عبارت مثبت زمانی صفر می‌شود که تک تک آن‌ها برابر صفر می‌شود، داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x+y=۰ \\ x+۲=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=-۲ \\ y=۴ \end{matrix}$$

لذا رابطه‌ی فوق یک تابع است.

٤) $(x^{۲}-y)\left((x+۱)^{۲}+(y-۱)^{۲}\right)=۰$

۵) $\sin y=x$

به x مقدار صفر را می‌دهیم داریم:

$$\sin y=۰ \Rightarrow y=k\pi \qquad (k\in Z)$$

به ازای $x=۰$ بی‌شمار y بدست می‌آید لذا رابطه‌ی فوق تابع نیست.

٦) $x^{۳}+xy^{۲}+x-x^{۲}y-y^{۳}-y=۰$

$$x^{۲}(x-y)+y^{۲}(x-y)+(x-y)=۰ \Rightarrow (x-y)(x^{۲}+y^{۲}+۱)=۰ \xrightarrow{x^{۲}+y^{۲}+۱\neq ۰} \Rightarrow y=x$$

تابع است.

عبارت $x^۲+y^۲+۱$ چون همواره مثبت است، لذا هیچ‌گاه صفر نمی‌شود.

۷) $y=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

رابطه‌ی فوق تابع نیست ، زیرا دو زوج $(۰,۰),(۰,۱)$ در آن صدق می‌کنند که مؤلفه‌ی اول آن‌ها برابر است.

۸) $y=\pm\sqrt{a-x}\pm\sqrt{x-a}$

مثال۶: چه تعداد از روابط زیر معرف یک تابع است؟

الف) $x^۲+y^۲=۶$ **ب)** $|x|+y^۲=۰$ **ج)** $y^۳+۳y^۲+۳y+x=۵$ **د)** $y+|x|=۳$

۱) ۱ **۲) ۲** **۳) ۳** **٤) ٤**

رابطه‌ی (ب) تابع است، زیرا مجموع $|x|$ و $y^۲$ تنها زمانی برابر صفر است که هر کدام صفر باشند، پس $f=\{(۰,۰)\}$. رابطه‌ی (ج) تابع است، زیرا اگر به طرفین تساوی یک واحد اضافه کنیم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$(y+۱)^۳+x=۶\Rightarrow(y+۱)^۳=۶-x\Rightarrow y+۱=\sqrt[۳]{۶-x}\Rightarrow y=\sqrt[۳]{۶-x}-۱$$

چون به ازای هر x فقط یک مقدار برای y به دست می‌آید، پس این رابطه نیز تابع است.

رابطه (د) تابع است، زیرا به ازای هر x فقط یک مقدار برای y به دست می‌آید.

$$y=۳-|x|$$

مثال۷: کدام‌یک از معادله‌های زیر در اعداد حقیقی ضابطه‌ی یک تابع است؟ (x متغیر مستقل است.)

۱) $x^۲+y^۲=۴xy$ **۲)** $|y|+x=۰$ **۳)** $x^۲+y^۲-۲=۲xy$ **٤)** $x^۲+y^۲=۲xy$

گزینه ۴:

$$(x-y)^۲=۰\Rightarrow y=x$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱:

$$x^۲+y^۲=۴xy\Rightarrow y^۲-۴xy+x^۲=۰\Rightarrow(y-۲x)^۲-۳x^۲=۰\Rightarrow y-۲x=\pm\sqrt{۳}x\Rightarrow y=(۲\pm\sqrt{۳})x$$

تابع نیست.

گزینه ۲:

$$x=-۱\Rightarrow y=\pm۱$$

تابع نیست.

گزینه ۳:

$$x=۰\Rightarrow y=\pm\sqrt{۲}$$

تابع نیست.

مثال۸: کدام رابطه‌ی زیر یک تابع را برحسب متغیر x مشخص می‌کند؟

۱) $y^۲-۲y+۱=\cos x$ **۲)** $\sqrt{x-۱}+\sqrt{y^۲-۲}=۰$

۳) $x^۲-۳xy+۲y^۲=۰$ **٤)** $xy^۳+xy-y^۲=۱$

$$xy^۳+xy-y^۲-۱=۰\Rightarrow xy(y^۲+۱)-(y^۲+۱)=۰\Rightarrow(y^۲+۱)(xy-۱)=۰\Rightarrow xy-۱=۰\Rightarrow y=\frac{۱}{x}$$

تابع است.

دلیل نادرستی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱) : $(y-1)^2=\cos x \Rightarrow y=1\pm\sqrt{\cos x} \xrightarrow{x=0} y=2\,,\ y=0$

گزینه‌ی (۲) : $\sqrt{x-1}+\sqrt{y^2-2}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y^2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\pm\sqrt{2} \end{cases}$

گزینه‌ی (۳) : $x^2-3xy+2y^2=0 \Rightarrow (x-y)(x-2y)=0 \Rightarrow y=x$ یا $y=\frac{x}{2}$

مثال۹: کدام‌یک از روابط زیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی ضابطه‌ی یک تابع بر حسب x را نمایش می‌دهد؟

۱) $y[x]=1$ **۲)** $[xy]=1$ **۳)** $x[y]=1$ **۴)** $[x][y]=1$

گزینه ۱ صحیح است.

تابع چند ضابطه‌ای:

هرگاه رابطه‌ای با چند ضابطه بیان شد در صورتی آن رابطه تابع است که دارای شرایط زیر باشد:

۱) تک تک آن ضابطه‌ها در دامنه‌ی تعریفشان، تابع باشد.

۲) اشتراک دو به دو ضابطه‌ها تهی باشد.

۳) در صورتی که اشتراک فاصله‌های مطرح شده تهی نباشد (دامنه‌های آن‌ها) به ازای عضوهای آن فاصله مشترک y های تولید شده دو ضابطه با هم برابر باشند.

با بیان ریاضی رابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x\in D_1 \\ f_2(x) & x\in D_2 \\ f_3(x) & x\in D_3 \end{cases}$ **یک تابع است هرگاه:**

۱) $f_1(x)$ **و** $f_2(x)$ **و** $f_3(x)$ **خود در فاصله‌های** D_1 **،** D_2 **و** D_3 **تابع باشند.**

۲) $D_1\cap D_2=D_2\cap D_3=D_1\cap D_3=\phi$

۳) اگر $D_1\cap D_2=[a\,,b]$ **باشد به ازای هر عضو مانند** t **از فاصله‌ی** $[a\,,b]$ **رابطه‌ی** $f_1(t)=f_2(t)$ **برقرار باشد.**

مثال۱۰: کدام یک از روابط زیر یک تابع است؟

۱) $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & x\le 1 \\ x^2\pm 3x & x>1 \end{cases}$

تابع نیست زیرا ضابطه‌ی $x^2\pm 3x$ در فاصله‌ی $x>1$ تابع نمی‌باشد.

۲) $g(x)=\begin{cases} x^3 & x<-1 \\ x^2+1 & x\ge 1 \end{cases}$

تابع است زیرا تک تک ضابطه‌ها در دامنه تعریفشان تابع هستند و اشتراک فاصله‌های ذکر شده تهی است.

۳) $h(x)=\begin{cases} ۲x^{۲}+۳ & x\le ۰ \\ ۴x+۳ & x\ge ۰ \end{cases}$

٤) $k(x)=\begin{cases} ۳x-۱ & x\le ۱ \\ x+۲ & x\ge ۰ \end{cases}$

مثال۱۱: اگر $f(x)=\begin{cases} a+x & |x|\le ۱ \\ x^{۲}+bx & |x|\ge ۱ \end{cases}$ **تابع باشد، مقادیر** a **و** b **را بیابید.**

تابع بصورت $f(x)=\begin{cases} a+x & -۱\le x\le ۱ \\ x^{۲}+bx & x\le -۱ \text{ یا } x\ge ۱ \end{cases}$ می‌باشد. اشتراک دامنه‌ها برابر با $x=\pm ۱$ است، که باید به ازای آن‌ها، مقادیر ضابطه‌ها یکسان باشد.

$$f_{۱}(x)=a+x \xrightarrow{x=۱} f_{۱}(۱)=a+۱$$

$$f_{۲}(x)=x^{۲}+bx \xrightarrow{x=۱} f_{۲}(۱)=۱+b \Rightarrow f_{۱}(۱)=f_{۲}(۱) \Rightarrow a+۱=۱+b \Rightarrow a=b \qquad (۱)$$

$$f_{۱}(x)=a+x \xrightarrow{x=-۱} f_{۱}(-۱)=a-۱$$

$$f_{۲}(x)=x^{۲}+bx \xrightarrow{x=-۱} f_{۲}(-۱)=۱-b \Rightarrow f_{۱}(-۱)=f_{۲}(-۱) \Rightarrow a-۱=۱-b \Rightarrow a+b=۲ \xrightarrow{(۱)} \begin{cases} a=۱ \\ b=۱ \end{cases}$$

مثال۱۲: فرض کنیم $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x(x+۱)}{x^{۸}[x]+۱} & x>۱ \\ \dfrac{x^{۲}[x]+ax}{x^{۸}+۱} & x<۲ \end{cases}$ **یک تابع باشد،** a **کدام است؟**

۱) -۱ **۲)** ۲ **۳)** $\frac{۱}{۲}$ **٤)** ۱

گزینه ۴ صحیح است.

روش‌های تعیین دامنه:

۱- اگر $f(x)$ **تابعی خطی باشد:**

$$f(x)=ax^{n}+bx^{n-1}+\ldots \Rightarrow D_f=R$$

۲- برای توابع کسری $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ **دامنه‌ی تعریف برابر است با:**

$$D_f=\mathbb{R}-\{h(x)=0\}=R-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

۳- اگر تابع رادیکالی باشد:

$$f(x)=\sqrt[n]{g(x)}\Rightarrow\begin{cases}n=2k \quad \Rightarrow D_f: g(x)\geq 0\\ n=2k+1\Rightarrow D_f: D_g\end{cases}$$

٤- اگر تابع مثلثاتی باشد:

$$f(x)=\sin(u)\Rightarrow D_f=D_u$$

$$f(x)=\cos(u)\Rightarrow D_f=D_u$$

$$f(x)=\tan(u)\Rightarrow D_f: u\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$f(x)=\cot g(u)\Rightarrow D_f: u\neq k\pi$$

٥- اگر تابع آرک مثلثاتی باشد:

$$f(x)=\text{Arcsin}(u)\Rightarrow D_f: -1\leq u\leq 1$$

$$f(x)=\text{Arc}\cos(u)\Rightarrow D_f: -1\leq u\leq 1$$

$$f(x)=\text{Arctg}(u)\Rightarrow D_f: D_u$$

$$f(x)=\text{Arccotg}(u)\Rightarrow D_f: D_u$$

٦- اگر تابع لگاریتمی باشد:

$$y=\log_{g(x)}^{h(x)}$$

$$(h(x)>0,\ g(x)>0,\ g(x)\neq 1)$$

آنگاه بین جواب‌های بدست آمده اشتراک می‌گیریم.

۷- اگر ضابطه تابع به صورت قدر مطلق یا جزء صحیح باشد، دامنه‌ی تابع برابر است با دامنه‌ی عبارت داخل آن‌ها:

$$f(x)=|g(x)|\Rightarrow D_f=D_g$$

$$f(x)=[g(x)]\Rightarrow D_f=D_g$$

مثال۱۳: تابع $f(x)=\frac{x+2}{x^2-ax+b}$ مفروض است اگر دامنه‌ی آن برابر $R-\{1\}$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ٤ ۲) ۳ ۳) ۲ ٤) ۱

$$x^2-ax+b=(x-1)^2=x^2-2x+1\Rightarrow a=2,\ b=1\Rightarrow a+b=3$$

مثال۱۴: دامنه تابع $\frac{1+\sin x}{3-[x+1]}$ کدام است؟

۱) $R-[2,3)$ ۲) $R-(2,3]$ ۳) $R-[3,4)$ ٤) $R-(3,4]$

$$3-[x+1]=0\Rightarrow[x+1]=3\Rightarrow 3\leq x+1<4\Rightarrow 2\leq x<3\Rightarrow D_f=R-[2,3)$$

مثال۱۵: دامنه‌ی تابع $y=\frac{۳}{[\sin x][x-۱]}$ در بازه‌ی $(۰,۲\pi)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ٤ ۳) ٥ ٤) ٦

گزینه ۱ صحیح است.

مثال۱۶: اگر دامنه تعریف تابع $f(x)=\frac{۲x^۲+۵}{x^۲+mx+\log n}$ برابر با $\mathbb{R}-\{۰,۱\}$ باشد، مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ٤ ۳) ۷ ٤) صفر

گزینه ۴ صحیح است.

مثال۱۷: دامنه $f(x)=\frac{۲-\frac{۱}{|x|}}{۴-\frac{۱}{|x+۱|}}$ برابر با $D_f=\mathbb{R}-A$ مجموعه A چند عضو دارد؟

۱) ٤ ۲) ۳ ۳) ٥ ٤) ۲

در ابتدا ریشه‌های مخرج $x=-۱$ و $x=۰$ لذا باید $x\neq ۰$ و $x\neq -۱$ باشد، سپس:

$$f(x)=\frac{\frac{۲|x|-۱}{|x|}}{\frac{۴|x+۱|-۱}{|x+۱|}}\Rightarrow f(x)=\frac{(|x+۱|)(۲|x|-۱)}{(|x|)(۴|x+۱|-۱)}\Rightarrow ۴|x+۱|-۱\neq ۰\Rightarrow |x+۱|\neq\frac{۱}{۴}\Rightarrow\begin{cases}x\neq -\frac{۳}{۴}\\ x\neq -\frac{۵}{۴}\end{cases}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰,-۱,-\frac{۳}{۴},-\frac{۵}{۴}\}$$

مجموعه A ، ۴ عضو دارد.

مثال۱۸: دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{۲-x-x^۲}$ کدام است؟

۱) $[-۱,۲]$ ۲) $[-۲,۰]$ ۳) $[-۲,۱]$ ۴) $[-۱,۱]$

$$-x^۲-x+۲\geq ۰\Rightarrow x^۲+x-۲\leq ۰\Rightarrow (x+۲)(x-۱)\leq ۰\Rightarrow -۲\leq x\leq ۱\Rightarrow D_f:[-۲,۱]$$

مثال۱۹: دامنه‌ی کدام تابع با دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x+۲}\sqrt{x-۲}$ برابر است؟

۱) $g(x)=\sqrt{\frac{x+۲}{x-۲}}$ ۲) $p(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ ۳) $h(x)=\frac{\sqrt{x+۳}}{\sqrt{x-۲}}$ ٤) $s(x)=\frac{\sqrt{x-۲}}{\sqrt{x+۲}}$

$$D_f=[۲,+\infty)$$

$$\begin{cases}D_g=(-\infty,-۲]\cup(۲,+\infty)\ ,\ D_p=(-\infty,-۲]\cup[۲,+\infty)\\ D_h=(۲,+\infty)\ ,\ D_s=[۲,+\infty)\end{cases}\Rightarrow D_f=D_s$$

مثال۲۰: در بازه ی $[-۱۰,۱۰]$ چند عدد صحیح به دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^۲-۶|x|}$ تعلق دارد؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۵

$\|x\|$		۰		۶	
$\|x\|^۲-۶\|x\|$			−	۰	+

$$|x|^۲-۶|x|\geq ۰ \Rightarrow |x|(|x|-۶)\geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ |x|\geq ۶ \end{cases} \Rightarrow x\geq ۶ \text{ یا } x\leq -۶ \text{ یا } x=۰$$

در بازه‌ی $[-۱۰,۱۰]$ اعداد صحیح $۰,\pm ۶,\pm ۷,\pm ۸,\pm ۹$ و ± ۱۰ به دامنه‌ی تابع تعلق دارند.

مثال۲۱: تعداد اعداد صحیح در دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x^۲-x-۶}}{\sqrt{۱۰۰-x^۲}}$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۷ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

$$\begin{cases} x^۲-x-۶\geq ۰ \\ ۱۰۰-x^۲>۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+۲)(x-۳)\geq ۰ \\ -۱۰<x<۱۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq -۲ \text{ یا } x\geq ۳ \\ -۱۰<x<۱۰ \end{cases} \Rightarrow -۱۰<x\leq -۲ \text{ یا } ۳\leq x<۱۰$$

مجموعه‌ی اعداد صحیح در دامنه‌ی تابع $\underbrace{\{-۹,-۸,...,-۲\}}_{\text{۸تا}}$,$\underbrace{۳,۴,...,۹}_{\text{۷تا}}\}$ می‌باشد که تعداد آن‌ها ۱۵ تا است.

مثال۲۲: دامنه $f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{x-۲}+\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $[۲,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۲)$ ۴) $(۰,+\infty)$

همواره برقرار است. $|x|\geq ۰ \Rightarrow$

$$\begin{matrix} \sqrt{x-۲}\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۲ \\ \sqrt{x}\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۰ \end{matrix} \Rightarrow x\geq ۲$$

مثال۲۳: دامنه‌ی تابع $f=\sqrt{[x^۲]+[-x^۲]}$ در بازه‌ی $[۰,۳]$ شامل چند عضو است؟

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

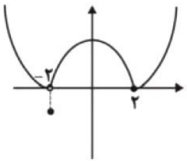
$$[x^۲]+[-x^۲]=\begin{cases} ۰ & x^۲\in Z \\ -۱ & x^۲\notin Z \end{cases} \Rightarrow D_f=\{\pm\sqrt{k}\mid k\in\mathbb{Z}\} \Rightarrow D_f\cap[۰,۳]=\{۰,۱,\sqrt{۲},\sqrt{۳},۲,\sqrt{۵},\sqrt{۶},\sqrt{۷},\sqrt{۸},۳\}$$

مثال۲۴: بزرگ‌ترین دامنه تابع $y=\sqrt{([x]+[-x])(۲x-۱)}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{Z}\cup\{x\mid x\geq \frac{۱}{۲}\}$ ۲) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}\cup\{x\mid x\geq \frac{۱}{۲}\}$ ۳) $\mathbb{Z}\cup\{x\mid x\leq \frac{۱}{۲}\}$ ۴) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}\cup\{x\mid x\leq \frac{۱}{۲}\}$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال۲۵: اگر نمودار تابع $f(x)$ به شکل مقابل باشد تمام دامنه $\sqrt{\frac{f(x)}{x}}$ کدام است؟



۱) $R-\{۰\}$ ۲) $\mathbb{R}$

۳) $(۰,+\infty)$ ۴) $(۰,+\infty)\cup\{-۲\}$

گزینه ۴ صحیح است.

☹مثال۲۶: دامنه تابع $f(x)=\sqrt{(\sin x+\cos x)^{۲}-۱}$ در بازه $[۰\ ,\ ۲\pi]$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ٤) ٤

عبارت زیر رادیکال را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{(\sin x+\cos x)^{۲}-۱}=\sqrt{\sin^{۲}x+\cos^{۲}x+۲\sin x\cos x-۱}\Rightarrow f(x)=\sqrt{۱+۲\sin x\cos x-۱}=\sqrt{۲\sin x\cos x}$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{\sin ۲x}\Rightarrow \sin ۲x\geq ۰$$

کمان در ناحیه اول و دوم قرار می‌گیرد.

$$\Rightarrow ۲k\pi\leq ۲x\leq ۲k\pi+\pi\Rightarrow k\pi\leq x\leq k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

در بازه $[۰\ ,\ ۲\pi]$ دامنه تابع $f(x)$ برابر $\left[۰\ ,\ \frac{\pi}{۲}\right]\cup\left[\pi\ ,\ \frac{۳\pi}{۲}\right]$ است که شامل سه عدد صحیح صفر ، ۱، ۴ می‌باشد.

☹مثال۲۷: تابع $f(x)=\begin{cases}-x & x\geq ۰\\ \frac{۱}{۲} & x<۰\end{cases}$ مفروض است. دامنه تابع $y=\sqrt{\operatorname{sgn}(x)+f(x)}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۱)$ **۲)** $[۰\ ,\ ۱]$ **۳)** $(-۱,۱)$ **٤)** $(-\infty,۰]$

گزینه ۲ صحیح است.

☺مثال۲۸: دامنه تابع $f(x)=\sqrt[۴]{[x]^{۲}-۳[x]-۴}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۰)\cup[۴,+\infty)$ **۲)** $[-۱,۴]$ **۳)** $(-\infty,-۱)\cup(۴,+\infty)$ **٤)** $[۱,۴]\cup(۴,۵]$

$$[x]^{۲}-۳[x]-۴\geq ۰\rightarrow [x]=-۱\ ,[x]=۴$$

$[x]$	$-\infty$	-۱		۴	$+\infty$
p	+	۰	/////	۰	+

$$\Rightarrow [x]\geq ۴ \text{ یا } [x]\leq -۱\Rightarrow \begin{matrix}[x]\geq ۴\Rightarrow x\geq ۴\\ [x]\leq -۱\Rightarrow x<۰\end{matrix}\Rightarrow D_f=(-\infty,۰)\cup[۴,+\infty)$$

☺مثال۲۹: دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x)=\tan(\pi x+\frac{۳\pi}{۲})$

$$D_f=\left\{x\,|\,\pi x+\frac{۳\pi}{۲}\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\right\}=\left\{x\,|\,x+\frac{۳}{۲}\neq k+\frac{۱}{۲}\right\}=\{x\,|\,x\neq k-۱\}$$

چون $K\in Z$ پس $K-۱\in Z$ بنابراین $D_f=R-Z$ می‌باشد.

۲) $f(x)=\cot(\pi x+\frac{۱}{۲})$

$$D_f=\left\{\pi x+\frac{۱}{۲}\neq k\pi\right\}=\left\{x\,|\,\pi x\neq k\pi-\frac{۱}{۲}\right\}=\left\{x\,|\,x\neq k-\frac{۱}{۲\pi}\right\}$$

۳) $f(x)=\cot\frac{۱}{x}$

$$D_f=\left\{x\,|\,\frac{۱}{x}\neq k\pi\right\}=\left\{x\,|\,x\neq\frac{۱}{k\pi}\right\}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{۱}{k\pi}\ ,\ ۰\right\}\quad (K\in Z)$$

٤) $f(x)=\tan\sqrt{x-۱}$

ابتدا دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{x-۱}$ را بدست می‌آوریم که دامنه برابر است با $D_y=[۱,+\infty)$ حال شرط دامنه‌ی tan را لحاظ می‌کنیم.

$$\Rightarrow D_f=[۱,+\infty)-\left\{x\in R \mid \sqrt{x-۱}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ (K\in Z)\right\} \Rightarrow D_f=[۱,+\infty)-\left\{x\in R \mid x=(k\pi+\frac{\pi}{۲})^۲+۱\ ,\ (K\in Z)\right\}$$

مثال۳۰: دامنه تابع $y=(|x|-x)\sqrt{-\sin^۲\pi x}$ **کدام است؟**

۱) IR **۲)** N **۳)** Q **٤)** Z

$$-\sin^۲\pi x\geq ۰\Rightarrow \sin\pi x=۰\Rightarrow \pi x=k\pi\Rightarrow x=k\ ,\ k\in Z\Rightarrow D_f=Z$$

مثال۳۱: دامنه تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۱-۵^x}{۷^{-x}-۷}}$ **شامل چند عدد صحیح نمی‌شود؟**

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **٤)** ٤٤

$$\frac{۱-۵^x}{۷^{-x}-۷}\geq ۰\Rightarrow ۱-۵^x=۰\Rightarrow ۵^x=۱\Rightarrow x=۰$$

$$۷^{-x}-۷=۰\Rightarrow \frac{۱}{۷^x}=۷\Rightarrow ۷^{x+۱}=۷^۰\Rightarrow x+۱=۰\Rightarrow x=-۱$$

		-۱	۰
$\frac{۱-۵^x}{۷^{-x}-۷}$	+	−	+
	ج	////	ج

فقط $x=-۱$ داخل دامنه نیست. (ریشه مخرج)

مثال۳۲: دامنه تابع $f(x)=\log_{(x^۲-۱)}[x+۲]$ **کدام است؟**

۱) $(۴,+\infty)$ **۲)** $(-\infty,-۱)-\{\sqrt{۲}\}$ **۳)** $(۱,+\infty)-\{\sqrt{۲}\}$ **٤)** $(-\infty,-۱)$

$$[x+۲]>۰\Rightarrow [x]+۲>۰\Rightarrow [x]>-۲\Rightarrow x\geq -۱\quad (۱)$$

$$x^۲-۱>۰\Rightarrow x^۲>۱\Rightarrow \begin{cases} x>۱ \\ \text{یا} \\ x<-۱ \end{cases}\quad (۲) \qquad \Rightarrow D_f=(۱,\sqrt{۲})\cup(\sqrt{۲},+\infty)=(۱,+\infty)-\{\sqrt{۲}\}$$

$$x^۲-۱\neq ۱\Rightarrow x^۲\neq ۲\Rightarrow x\neq \pm\sqrt{۲}\quad (۳)$$

مثال۳۳: چه تعداد عدد طبیعی در دامنه $f(x)=\log(۳[x]-۱)([x]-\sqrt{۲})$ **واقع نمی‌گردد؟**

۱) ۰ **۲)** ۱ **۳)** ۲ **٤)** ۳

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۳۴: دامنه‌ی تعریف تابع $f(x)=\log\log\log(4x-6)$ کدام است؟

۱) $\left[\frac{3}{2},+\infty\right]$ ۲) $(\frac{3}{2},+\infty)$ ۳) $[4,+\infty)$ ۴) $(4,+\infty)$

مثال۳۵: دامنه‌ی تعریف تابع $f(x)=\lfloor\log\log(4-|x|)\rfloor$ برابراست با :

۱) $[-4,4]$ ۲) $[-2,2]$ ۳) $(-\infty,4]$ ۴) $(-3,3)$

$$\log(4-|x|)>0\Rightarrow 4-|x|>1\Rightarrow |x|<3\Rightarrow -3<x<3$$

مثال۳۶: دامنه‌ی تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-2)}$ به صورت $(a,b]$ می‌باشد. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

$$\begin{cases}x-2>0\\ \log_{\frac{1}{2}}(x-2)\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>2\\ \log_{\frac{1}{2}}(x-2)\ge\log_{\frac{1}{2}}1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>2\\ x-2\le 1\end{cases}\Rightarrow 2<x\le 3\Rightarrow(2,3]=(a,b]\Rightarrow b-a=1$$

مثال۳۷: کل دامنه تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt[4]{\log_{0/5}(2x+3)}$ کدام است؟

۱) $(-\frac{3}{2},-1]$ ۲) $(-\frac{3}{2},-\frac{3}{4}]$ ۳) $(-\frac{3}{4},-1]$ ۴) $(-\frac{3}{2},+\infty)$

$$\begin{cases}2x+3>0\\ \log_{0/5}(2x+3)\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-\frac{3}{2}\\ 2x+3\le 1\Rightarrow x\le -1\end{cases}\Rightarrow D_f=(-\frac{3}{2},-1]$$

مثال۳۸: دامنه‌ی تابع $y=\operatorname{Arccos}\frac{2x+1}{x-1}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ٤ ٤) بی‌شمار

$$\left|\frac{2x+1}{x-1}\right|\le 1\Rightarrow\frac{(2x+1)^2}{(x-1)^2}\le 1\xrightarrow{x\neq 1}(2x+1)^2\le(x-1)^2\Rightarrow 4x^2+4x+1\le x^2-2x+1\Rightarrow 3x^2+6x\le 0$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$3x^2+6x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

با توجه به جول تغییر علامت بالا، دامنه‌ی تابع عبارت است از $D_f=[-2,0]$ که شامل اعداد صحیح ۲- و ۱- و صفر است.

مثال۳۹: دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\operatorname{Arccos}\sqrt{x-[x]}$ کدام است؟

۱) $[-1,1]$ ۲) $[0,1)$ ۳) $\mathbb{R}$ ٤) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

گزینه ۳ صحیح است.

برد تابع:

طرز تعیین برد توابع:

۱)به طور کلی می‌توان گفت در $ax^2+bx+c=0$ **داریم:**

الف) اگر $a>0$ **برد تابع** $y=ax^2+bx+c$ **برابر است با :** $R_f=[\frac{-\Delta}{4a},+\infty)$

ب) اگر $a<0$ **برد تابع** $y=ax^2+bx+c$ **برابر است با:** $R_f=(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}]$

۲) x را بر حسب y به دست آورده دامنه تابع بر حسب y برد تابع خواهد بود.

۳) استفاده از مربع کامل کردن: برای این کار مربع نصف ضریب x را اضافه و کم می‌نماییم .

٤) استفاده از روابط موجود:

در بسیاری از موارد می‌توانیم به طور مستقیم یا غیر مستقیم از روابط ریاضی برد را بیابیم.

۱) $0\le x-\lfloor x\rfloor<1$

۲) $\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=\begin{cases}0 & x\in Z\\ -1 & x\notin Z\end{cases}$

۳) $x+\frac{1}{x}\ge 2\ ,\ x>0$

٤) $x+\frac{1}{x}\le -2\ ,\ x<0$

٥) $y=|x-a| \Rightarrow R_f=[0,+\infty)$

٦) $y=|x-a|+|x-b| \Rightarrow R_f=[|b-a|,+\infty)$

۷) $y=-|x-a| \Rightarrow R_f=(-\infty,0]$

۸) $y=|x-a|-|x-b| \Rightarrow R_f=[-|b-a|,|b-a|]$

۹) $y=\frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow R_f=[-1,1]$

۱۰) $y=\frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow R_f=[0,1]$

۱۱) $y=\frac{|x|}{|x|+1} \Rightarrow R_f=[0,1)$

٥) استفاه از فرمول‌ها و روابط مثلثاتی :

۱) $y=a\sin x+b\cos x+c \Rightarrow -\sqrt{a^2+b^2}+c\le y\le\sqrt{a^2+b^2}+c$

۲) $y=\sin^{2n}x+\cos^{2n}x\Rightarrow\frac{1}{2^{n-1}}\le y\le 1$

۳) $y=a\,tgx+b\cot gx\ ,\ 0<x<\frac{\pi}{2}\quad R_f=[2\sqrt{ab},+\infty)$

٤) $y=a\,tgx+b\cot gx\ ,\ \frac{\pi}{2}<x<\pi\quad R_f=(-\infty,-2\sqrt{ab}]$

٥) $y=a\sin^2x+b\sin x+c$

با قرار دادن $\sin x=\frac{-b}{2a}\ ,\ \begin{matrix}\sin x=1\\ \sin x=-1\end{matrix}$ **اگر** $-1<\frac{-b}{2a}<1$ **باشد حدود تغییرات y را می‌یابیم.**

٦) $y=a\cos^2x+b\cos x+c$

با قرار دادن $\cos x=\frac{-b}{2a}\ ,\ \begin{matrix}\cos x=1\\ \cos x=-1\end{matrix}$ **اگر** $-1<\frac{-b}{2a}<1$ **باشد حدود تغییرات y را می‌یابیم.**

٦)برد تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ **با شرط** $\frac{a}{c}\ne\frac{b}{d}$ **است با:** $R_f=IR-\left\{\frac{a}{c}\right\}$

واگر n عددی فرد باشد، برد تابع $y=\frac{ax^n+b}{cx^n+d}$ **با شرط** $\frac{a}{c}\ne\frac{b}{d}$ **برابر با** $R_f=IR-\left\{\frac{a}{c}\right\}$

☺مثال۴۰: برد تابع $y=\sqrt{1-x^2}$ کدام است؟

۱) $[-1,1]$ ۲) $[0,1]$ ۳) $\{0,1\}$ ٤) $R>0$

گزینه ۲ صحیح است.

😐مثال۴۱:برد تابع $y=\frac{5x}{x^2+1}$ کدام است؟

۱) $[-5,5]$ ۲) $[-\frac{5}{2},\frac{5}{2}]$ ۳) $[0,\frac{5}{2}]$ ٤) $[0,5]$

گزینه ۲ صحیح است.

😐مثال۴۲: کدامیک از اعداد زیر درمجموعه برد تابع $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ قرار ندارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ٤) ۱-

$$y=\frac{1-x^2}{1+x^2}\Rightarrow y+yx^2=1-x^2\Rightarrow(y+1)x^2+y-1=0\Rightarrow x^2=\frac{1-y}{y+1}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1-y}{y+1}}\Rightarrow\frac{1-y}{y+1}\geq 0\Rightarrow R_f=(-1,1]$$

😐مثال۴۳: برد تابع با ضابطه $y=x-2\sqrt{x-1}$ کدام است؟

۱) $y\geq -2$ ۲) $y\geq -1$ ۳) $y\geq 0$ ٤) $y\geq 1$

$$y=x-2\sqrt{x-1}\Rightarrow y=(\sqrt{x-1}-1)^2\Rightarrow y\geq 0$$

😐مثال۴۴: اگر برد تابع f برابر با $[-1,2]$ باشد، برد تابع $g(x)=\sqrt{2+f(x)-f^2(x)}$ کدام است؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $(0,\frac{3}{2})$ ۳) $(\frac{3}{2},+\infty)$ ٤) $\left[0,\frac{3}{2}\right]$

گزینه ۴ صحیح است.

☹مثال۴۵: برد تابع به معادله $y=\frac{5x+3}{x}-\left[\frac{-x+3}{x}\right]-7$ کدام است؟

۱) R ۲) $[0,1)$ ۳) $[-1,0)$ ٤) $[-2,-1)$

$$y=5+\frac{3}{x}-(\left[-1+\frac{3}{x}\right])-7=-1+\frac{3}{x}-\left[\frac{3}{x}\right]\Rightarrow 0\le\frac{3}{x}-[\frac{3}{x}]<1\Rightarrow -1\le -1+\frac{3}{x}-[\frac{3}{x}]<0\Rightarrow -1\le y<0$$

☹مثال۴۶: برد تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x}{2}-\sqrt{(\left[\frac{x}{2}\right]-\frac{x}{2})^2}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) Z ۳) $\mathbb{R}-Z$ ٤) $\varnothing$

$$f(x)=\frac{x}{2}-\left|[\frac{x}{2}]-\frac{x}{2}\right|$$

می‌دانیم که همواره $-1<[U]-U\le 0$ پس عبارت $[\frac{x}{2}]-\frac{x}{2}$ منفی است. بنابراین:

$$f(x)=\frac{x}{2}-(-[\frac{x}{2}]+\frac{x}{2})\Rightarrow f(x)=\frac{x}{2}+[\frac{x}{2}]-\frac{x}{2}\Rightarrow f(x)=[\frac{x}{2}]\Rightarrow R_f=Z$$

☹مثال۴۷: برد تابع $f(x)=(-1)^{[x]}(x-[x])$ کدام است؟

۱) $(-1,1)$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $(-1,1]$ ٤) $[-1,1)$

گزینه ۱ صحیح است.

😐مثال۴۸: برد تابع $f(x)=\frac{x^2+3x+m}{x+1}$ مجموعه‌ی R می‌باشد حدود m کدام است؟

۱) $\sqrt{2}<m<2$ ۲) $m\ge 2$ ۳) $m\le 2$ ٤) $m<2$

$$y=\frac{x^2+3x+m}{x+1}$$

$$xy+y=x^2+3x+m\Rightarrow x^2+(3-y)x+m-y=0\xrightarrow{\Delta>0}(3-y)^2-4(1)(m-y)>0\Rightarrow y^2-6y+9-4m+4y=y^2-2y+9-4m>0$$

$$\Delta'<0\Rightarrow 4-4(1)(9-4m)<0\Rightarrow m<2$$

😐مثال۴۹: اگر برد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2+ax+2$ ، $[-2,+\infty)$ باشد، a کدام است؟

۱) ± 2 ۲) ± 4 ۳) ± 8 ٤) ± 16

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۵۰: برد تابع $f(x)=\frac{1}{2+\sqrt{|x+3|}}$ برابر کدام است؟

۱) R^+ ۲) $(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$ ۳) $(0,\frac{1}{2}]$ ۴) $(0,\frac{1}{2+\sqrt{3}})$

با توجه به نامساوی $|x+3|\geq 0$ داریم:

$$\sqrt{|x+3|}\geq 0 \Rightarrow 2+\sqrt{|x+3|}\geq 2 \Rightarrow \frac{1}{2+\sqrt{|x+3|}}\leq \frac{1}{2}$$

از طرفی تابع f همواره مثبت و غیر صفر است پس:

$$0<\frac{1}{2+\sqrt{|x+3|}}\leq \frac{1}{2} \Rightarrow R_f=(0,\frac{1}{2}]$$

مثال۵۱: برد تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{2x-3|x|}$ کدام است؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $[0,1)$ ۳) $\{0\}$ ۴) $[0,3)$

$$2x-3|x|\geq 0 \Rightarrow 2x\geq 3|x| \Rightarrow x=0 \quad \Rightarrow D_f=\{0\} \Rightarrow f=\{(0,0)\}$$

مثال۵۲: برد تابع $f(x)=\sqrt{(6x-x^2-9)|x-1|}$ کدام است؟

۱) $\{1\}$ ۲) $\{0\}$ ۳) $\mathbb{R}\geq 0$ ۴) $\mathbb{Z}$

$$(6x-x^2-9)|x-1|\geq 0 \Rightarrow -(x-3)^2|x-1|\geq 0 \Rightarrow (x-3)^2|x-1|\leq 0$$

از طرفی $(x-3)^2\geq 0$ و $|x-1|\geq 0$ بنابراین فقط:

$$(x-3)^2|x-1|=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow R_f=\{0\}$$

مثال۵۳: برد تابع $f(x)=\frac{1}{|x-1|+|x+3|}$ کدام است؟

۱) $(0,\frac{1}{2}]$ ۲) $(0,\frac{1}{4})$ ۳) $[0,\frac{1}{4})$ ۴) $(0,\frac{1}{4}]$

مینیمم مقدار عبارت $y=|x-1|+|x+3|$ به ازای هر کدام از ریشه‌های درون قدر مطلق‌ها حاصل می‌گردد و عبارت است از:

$\text{Min}y=|1-1|+|1+3|=4$ و تابع ماکزیمم مطلق ندارد، بنابراین $4\leq y<+\infty$ و در نتیجه $0<\frac{1}{y}\leq\frac{1}{4}$.

مثال۵۴: برد تابع $f(x)=|x+4|-|x+1|$ کدام است؟

۱) $[-3,3)$ ۲) $[-4,-1]$ ۳) $[1,4]$ ۴) $[0,3]$

$$y=|x-a|-|x-b| \Rightarrow R_f=[-|b-a|,|b-a|] \Rightarrow -|-4+1|\leq|x+4|-|x+1|\leq|-4+1| \Rightarrow -3\leq y\leq 3$$

مثال۵۵: برد تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\cos^4 x+\sin^2 x$ برابر است با:

۱) $[\frac{3}{4},1]$ ۲) $(\frac{3}{4},1)$ ۳) $[\frac{1}{2},1]$ ۴) $(0,1]$

$$f(x)=\cos^4 x+\sin^2 x=\cos^4 x-\cos^2 x+1 \Rightarrow f(x)=\cos^4 x-\cos^2 x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 \Rightarrow f(x)=(\cos^2 x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} \text{Max}\left\{(\cos^{۲} x-\frac{۱}{۲})^{۲}\right\}=\frac{۱}{۴} \\ \text{Min}\left\{(\cos^{۲} x-\frac{۱}{۲})^{۲}\right\}=۰ \end{cases} \Rightarrow ۰\le(\cos^{۲} x-\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۳}{۴}\le\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{۳}{۴}\le f(x)\le ۱$$

مثال۵۶: برد تابع $f(x)=۲\left(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}\right)^{۲}$ **کدام است؟**

۱) $[۰,۲]$ **۲)** $[۰,۴]$ **۳)** $[-۱,۲]$ **٤)** $[۱,۴]$

$$f(x)=۲(\sin^{۲}\frac{x}{۲}+\cos^{۲}\frac{x}{۲}+۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲})=۲(۱+\sin x)$$

$$-۱\le\sin x\le ۱\Rightarrow ۰\le ۱+\sin x\le ۲\Rightarrow ۰\le ۲(۱+\sin x)\le ۴\Rightarrow \text{برد}=[۰,۴]$$

مثال۵۷: اگر برد تابع $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)$ **بازه‌ی** $[a,b]$ **باشد، آن‌گاه** $b-a$ **کدام است؟**

۱) ۲ **۲)** $\sqrt{۲}$ **۳)** $۲\sqrt{۲}$ **٤)** ۱

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sin x\cos\frac{\pi}{۴}+\cos x\sin\frac{\pi}{۴}-\left(\sin x\cos\frac{\pi}{۴}-\cos x\sin\frac{\pi}{۴}\right)\Rightarrow f(x)=۲\cos x\sin\frac{\pi}{۴}=۲\cos x\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}\cos x$$

$$-۱\le\cos x\le ۱\Rightarrow-\sqrt{۲}\le f(x)\le\sqrt{۲}\Rightarrow R_f=\left[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}\right]\Rightarrow\sqrt{۲}-(-\sqrt{۲})=۲\sqrt{۲}$$

مثال۵۸: برد تابع $f(x)=\frac{\sin ۳x}{\sin x}-\frac{\cos ۳x}{\cos x}$ **آن‌گاه برد تابع** f **کدام است؟**

۱) $\{۱\}$ **۲)** $\{۲\}$ **۳)** $\{\frac{۱}{۲}\}$ **٤)** $\{۴\}$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۵۹: برد تابع $f(x)=\frac{۲x}{۱+x^{۲}}+\frac{۱-x^{۲}}{۱+x^{۲}}$ **برابر است با:**

۱) $[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}]$ **۲)** $[-۱,\sqrt{۲}]$ **۳)** $[-\sqrt{۲},۱]$ **٤)** $[-۱,۱)$

$$x=tg\theta\Rightarrow f(tg\theta)=\frac{۲tg\theta}{۱+tg^{۲}\theta}+\frac{۱-tg^{۲}\theta}{۱+tg^{۲}\theta}$$

$$f(tg\theta)=\sin ۲\theta+\cos ۲\theta$$

$$-\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}\le\sin ax+\cos ax\le\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}\Rightarrow-\sqrt{۲}\le\sin ۲\theta+\cos ۲\theta\le\sqrt{۲}\Rightarrow R_f=\left[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}\right]$$

مثال۶۰: برد تابع با ضابطه $y=\frac{\sqrt{۱۲x}}{۱+x^{۲}}+\frac{x^{۲}+۳}{۱+x^{۲}}$ **کدام است؟**

۱) $\left[-۲,\sqrt{۲}\right]$ **۲)** $\left[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}\right]$ **۳)** $[-۲,۲]$ **٤)** $[۰,۴]$

$$y=\frac{2\sqrt{3}x}{1+x^2}+\frac{2(1+x^2)+1-x^2}{1+x^2}=\frac{2\sqrt{3}x}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}+2$$

حال اگر فرض کنیم $x=\tan(\alpha)$ داریم:

$$y=\frac{\sqrt{3}\times 2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}+\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}+2 \Rightarrow y=\sqrt{3}\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+2$$

از طرفی داریم:

$$-\sqrt{4}\le\sqrt{3}\sin 2\alpha+\cos 2\alpha\le\sqrt{4}\Rightarrow 0\le\sqrt{3}\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+2\le 4\Rightarrow 0\le y\le 4$$

مثال۶۱: برد تابع $y=\frac{2x^2+4}{\sqrt{2x^2+3}}$ برابر است با:

۱) $[1,2]$ **۲)** $[1,+\infty)$ **۳)** $[2,+\infty)$ **۴)** $[1,4)$

$$f(x)=\frac{(2x^2+3)+1}{\sqrt{2x^2+3}}=\frac{2x^2+3}{\sqrt{2x^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{2x^2+3}}=\sqrt{2x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{2x^2+3}}\ge 2$$

پس: $R_f=[2,+\infty)$

مثال۶۲: برد تابع $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ را بدست آورید.

$$y=\sin^4 x+\cos^4 x\Rightarrow n=2\,,\,2n=4\Rightarrow\frac{1}{2^{n-1}}\le y\le 1\Rightarrow\frac{1}{2^{2-1}}\le y\le 1\Rightarrow R_f=\left[\frac{1}{2},1\right]$$

مثال۶۳: برد تابع $y=\sin^2 x+\sin x+3$ را بدست آورید.

$$y=\sin^2 x+\sin x+3\Rightarrow\sin x=1\Rightarrow y=1^2+1+3=5$$

$$\sin x=-1\Rightarrow y=(-1)^2-1+3=3$$

$$\sin x=\frac{-b}{2a}=-\frac{1}{2}\Rightarrow y=(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}+3=\frac{11}{4}\Rightarrow R_f=\left[\frac{11}{4},5\right]$$

مثال۶۴: اگر برای تابع $f(x)=\frac{x+m}{x-m}$ داشته باشیم $D_f=R_f$ آن‌گاه $f(2m+1)$ کدام است؟

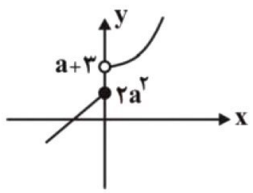
۱) ۳ **۲)** ٤ **۳)** ۲ **٤)** ۱

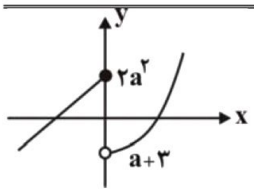
گزینه ۳ صحیح است.

مثال۶۵: اگر $f(x)=\begin{cases}x+2a^2 & x\le 0\\ x^2+(a+3) & x>0\end{cases}$ آن‌گاه همه مقادیر a که به ازای آن $D_f=R_f$ کدام است؟

۱) $a\ge\frac{3}{2}$ **یا** $a\le -1$ **۲)** $-1\le a\le\frac{3}{2}$ **۳)** $a\ge -1$ **٤)** $a\le\frac{3}{2}$

اگر $x\le 0$ آن‌گاه $y\le 2a^2$ و اگر $x>0$ آن‌گاه $x^2>0$ و $x^2+(a+3)>a+3$ در نتیجه $R_f=\left(-\infty\,,\,2a^2\right]\cup(a+3,+\infty)$ دامنه تابع R است و برای آن که برد تابع نیز R باشد طبق شکل باید $2a^2\ge a+3$ یعنی انتهای بازه سمت چپ از ابتدای بازه سمت راست بزرگ‌تر یا مساوی باشد لذا باید





$۲a^۲ - a - ۳ \geq ۰$

پس داریم:

$۲a^۲ - a - ۳ \geq ۰ \Rightarrow (a+۱)(۲a-۳) \geq ۰ \Rightarrow a \leq -۱$ یا $a \geq \frac{۳}{۲}$

برد توابع چند ضابطه‌ای:

اگر مقادیر تابع بر مجموعه $A_۱$ با ضابطه (۱) و بر مجموعه $A_۲$ با ضابطه ۲ تعریف شود. در این صورت اجتماع $A_۱$ و $A_۲$ دامنه تابع خواهد بود و اجتماع بردها برد تابع کل می باشد.

مثال۶۶: برد تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x \geq ۲ \\ \frac{۱}{x} & ۰ < x < ۲ \end{cases}$ **کدام است؟**

۱) $(۰,+\infty)$ **۲)** $(\frac{۱}{۲},+\infty)$ **۳)** $(۰,\frac{۱}{۲}) \cup [۴,+\infty)$ **٤)** $[۴,+\infty)$

برد ضابطه‌ی اول، یعنی $y=x^۲$ روی بازه‌ی $[۲,+\infty)$ برابر $[۴,+\infty)$ است. از طرفی در مورد ضابطه ی $y=\frac{۱}{x}$ بر بازه‌ی $(۰,۲)$ داریم:

$۰ < x < ۲ \Rightarrow \frac{۱}{x} > \frac{۱}{۲}$

پس برد ضابطه‌ی دوم $(\frac{۱}{۲},+\infty)$ است. اجتماع این دو بازه $(\frac{۱}{۲},+\infty)$ می‌باشد. پس $R_f=(\frac{۱}{۲},+\infty)$.

مثال۶۷: اگر برد تابع $f(x)=\begin{cases} [x]+۱ & x > ۱ \\ -۲x^۲ & x \leq ۱ \end{cases}$ **به صورت** $\{y|y \leq a\ ,\ y \geq b\}$ **باشد آن‌گاه** $a-b$ **کدام است؟**

۱) ۱ **۲)** ۱- **۳)** ۲- **٤)** ۲

گزینه ۳ صحیح است.

تساوی دو تابع

$y=f(x)$ و $y=g(x)$ را مساوی گویند هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:
الف) دامنه هر دو یکسان باشند.
ب) به ازای xهای مشترک، yهای برابر داشته باشند.

مثال۶۸: در کدام گزینه دو تابع برابرند؟

۱) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^{۲}} \\ g(x)=x \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{|x|} \\ g(x)=\dfrac{\sqrt{x^{۲}}}{x} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(x)=(\sqrt{x})^{۲} \\ g(x)=x \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^{۲}}{|x|} \\ g(x)=|x| \end{cases}$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۶۹: هرگاه توابع $f(x)=\begin{cases} b & x=۲ \\ \dfrac{x^{۲}-۵x+a}{x-۲} & x\neq ۲ \end{cases}$ و $g(x)=x+c$ **برابر باشند، مقدار** b **چه‌قدر است؟**

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

$f(۲)=b, f(x)=g(x)\Rightarrow g(۲)=۲+c=f(۲)\Rightarrow ۲+c=b$

$f(۰)=\dfrac{a}{-۲}, g(۰)=c\Rightarrow -\dfrac{a}{۲}=c\Rightarrow a=-۲c \quad (I)$

$f(۱)=\dfrac{-۴+a}{-۱}=۴-a, g(۱)=۱+c\Rightarrow ۴-a=۱+c \quad (II)$

$(I),(II)\Rightarrow ۴=۱-c\Rightarrow c=-۳\Rightarrow b=-۱$

مثال۷۰: به ازای کدام مقادیر a **دو تابع** $g(x)=۱$ و $f(x)=\dfrac{x^{۲}+ax+۲}{x^{۲}+ax+۲}$ **مساوی هستند؟**

۱) $|a|\neq ۲$ ۲) $|a|<۲\sqrt{۲}$ ۳) $|a|>\sqrt{۲}$ ۴) **همه مقادیر** a

گزینه ۲ صحیح است.

☹مثال۷۱: کدام‌یک از جفت توابع زیر با یکدیگر برابرند؟

۱) $\begin{cases} f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \\ f(x)=\sin\pi x+\cos\pi x \end{cases}$ $\begin{cases} g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \\ g(x)=1-\sin 2\pi x \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \\ f(x)=(-1)^{x+1} \end{cases}$ $\begin{cases} g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \\ g(x)=\cos\pi x \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \\ f(x)=\sin\pi x \end{cases}$ $\begin{cases} g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \\ g(x)=(-1)^{2x}+(-1)^{2x+1} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \\ f(x)=(-1)^{x} \end{cases}$ $\begin{cases} g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \\ g(x)=\cos^2\pi x \end{cases}$

گزینه ۱) $g(x)=1-0=1 \quad f(x)=0\pm 1=\pm 1$

گزینه ۲) $g(x)=(-1)^{x} \quad f(x)=(-1)^{x+1}$

گزینه ۳) $g(x)=1-1=0 \quad f(x)=0$

گزینه ۴) $g(x)=(-1)^{2x}=1 \quad f(x)=(-1)^{x}=\pm 1$

☹مثال۷۲: کدام یک از توابع زیر با تابع $f(x)=2$ با فرض $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{0\}$ مساوی است؟

۱) $g(x)=\left[\dfrac{x^2}{x^2+1}\right]$ ۲) $g(x)=\left[\dfrac{2x^2}{x^2+1}\right]$ ۳) $g(x)=\left[\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}\right]$ ۴) $g(x)=\left[\dfrac{x^2+1}{x^2}\right]$

☹مثال۷۳: کدام جفت از توابع زیر مساویند؟

۱) $g(x)=\log(x+1)-\log(x-1)\ ,\ f(x)=\log\dfrac{x+1}{x-1}$ ۲) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\ ,\ f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

۳) $g(x)=1\ ,\ f(x)=(-1)^{2x}$ ۴) $y=-1+\sqrt[3]{x+1}\ ,\ y^3+3y^2+3y-x=0$

$$y^3+3y^2+3y-x=0\Rightarrow(y+1)^3=1+x\Rightarrow y=-1+\sqrt[3]{x+1}$$

در سایر گزینه‌ها دامنه‌ی توابع داده شده مساوی نیستند.

گزینه‌ی ۱) $D_g=(1,+\infty)\ ,\ D_f=(-\infty\ ,\ -1)\cup(1\ ,\ +\infty)$

گزینه۲) $D_g=[0\ ,\ +\infty)\ ,\ D_f=(-\infty\ ,-1)\cup[0\ ,\ +\infty)$

گزینه‌ی ۳) مثلاً اگر در f، $x=\frac{1}{4}$ قرار دهیم، تابع f تعریف نمی‌شود در صورتی که دامنه g برابر R است.

😐مثال۷۴: کدام تابع زیر با تابع $f(x)=\sqrt{-x^3}$ برابر است؟

۱) $y=x\sqrt{-x}$ ۲) $y=-x\sqrt{-x}$ ۳) $y=-x\sqrt{x}$ ۴) $y=\sqrt{\dfrac{x^4}{-x}}$

از آن‌جا که دامنه‌ی f بازه‌ی $(-\infty,0]$ است پس داریم:

$$f(x)=\sqrt{-x^3}=\sqrt{-x(x^2)}=|x|\sqrt{-x}=-x\sqrt{-x}$$

مثال۷۵: کدام جفت از از توابع زیر برابر هستند؟

۱) $g(x)=2\log x , f(x)=\log x^{2}$

۲) $g(x)=\sqrt{x-x^{2}} , f(x)=\sqrt{x} , \sqrt{1-x}$

۳) $g(x)=x-1 , f(x)=\frac{x^{2}-1}{x+1}$

۴) $g(x)=\sqrt{x-1} , f(x)=\sqrt{\frac{x^{2}-1}{x+1}}$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۷۶: کدام جفت از توابع داده شده مساوی هستند؟

۱) $\begin{cases} f(x)=\sin x \\ g(x)=\sqrt{1-\cos^{2} x} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{1+x(x+2)} \\ g(x)=|x+1| \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(x)=\log x^{2} \\ g(x)=2\log x \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(x)=2^{\log_{2} x} \\ g(x)=\log_{2} 2^{x} \end{cases}$

$$f(x)=\sqrt{1+x(x+2)}=\sqrt{1+x^{2}+2x}=\sqrt{(x+1)^{2}}=|x+1|=g(x)$$

دلیل نادرستی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱) : $f(x)=\sin x , g(x)=|\sin x| \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1 , g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=|-1|=1$

گزینه‌ی (۳) : $D_f=R-\{0\} , D_g=(0,+\infty) \Rightarrow D_f \neq D_g$

گزینه‌ی (۴) : $D_f=(0,+\infty) , D_g=R \Rightarrow D_f \neq D_g$

اعمال روی توابع

اگر f **و** g **با دامنه‌های** D_f **و** D_g **باشند.**

۱) $(kf)(x) = k\,f(x)$

۲) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad D_{f+g} = D_f \cap D_g$

۳) $(f.g)(x) = f(x)\,.\,g(x) \qquad D_{f.g} = D_f \cap D_g$

۴) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad D_{f-g} = D_f \cap D_g$

۵) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\}$

مثال۷۷: اگر $f = \{(۰,۱),(۱,۱),(-۱,۲),(۲,۰)\}$ **و** $g\{(-۱,-۱),(۲,-۲),(۳,۰)\}$ **باشد،** $f.g$ **کدام است؟**

۱) $\{(-۲,-۱),(۲,۰)\}$ **۲)** $\{(۱,-۲),(۴,۰)\}$ **۳)** $\{(-۱,-۲),(۲,۰)\}$ **۴)** $\{(-۱,۱),(۲,-۲)\}$

زوج‌هایی که مؤلّفه‌های اول برابر دارند، مؤلّفه‌ی دومشان در هم ضرب می‌شوند.

$f.g = \{(-۱,-۱\times۲),(۲,-۲\times۰)\} = \{(-۱,-۲),(۲,۰)\}$

مثال۷۸: هرگاه $f = \{(۱,۲),(۳,۴),(۵,۰)\}$ **و** $g = \{(۵,-۱),(۳,۲),(۴,۱)\}$**، آن‌گاه تابع** $\frac{f+g}{۲f}$ **کدام است؟**

۱) $\{(۵,۰),(۳,\frac{۳}{۱۶})\}$ **۲)** $\{(۳,\frac{۳}{۴})\}$ **۳)** $\{(۳,\frac{۳}{۱۶})\}$ **۴)** $\{(۵,۰),(۳,\frac{۳}{۸})\}$

$$\begin{cases} f+g = \{(۳,۶),(۵,-۱)\} \\ ۲f = \{(۱,۴),(۳,۸),(۵,۰)\} \end{cases} \Rightarrow \frac{f+g}{۲f} = \{(۳,\frac{۶}{۸})\} = \{(۳,\frac{۳}{۴})\}$$

مثال۷۹: اگر $f = \{(۰,۱),(-۴,۴),(۴,-۹),(۱۶,۰)\}$ **آن‌گاه تابع** $\frac{۱}{\sqrt{f}}$ **کدام است؟**

۱) $\{(۰,۱),(-۲,\frac{۱}{۲}),(۴,۰)\}$ **۲)** $\{(۰,۱),(-۲,\frac{۱}{۲})\}$ **۳)** $\{(۰,۱),(-۴,\frac{۱}{۲}),(۴,-\frac{۱}{۳})\}$ **۴)** $\{(۰,۱),(-۴,\frac{۱}{۲})\}$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال۸۰: اگر $f = \{(۱,۲),(۰,a^۲),(a,۰)\}$ **و** $g = \{(-۱,۲),(-۲,۱),(۰,۴)\}$ **و دامنه** $f-g$ **برابر** $\{۰\,,\,-۲\}$ **باشد آن‌گاه زوج مرتب** $\frac{g}{f}$ **کدام است؟**

۱) $(-۲,۱)$ **۲)** $(-۲,۰)$ **۳)** $(۰,۴)$ **۴)** $(۰,۱)$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال۸۱: اگر $f(x)=\sqrt{[x]+۱}$ **و** $g(x)=\dfrac{\cos\frac{\pi x}{۲}}{|x-۳|}$ **آن‌گاه حاصل** $(f.g)(\frac{۳}{۲})$ **کدام است؟**

۱) $-\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ٤) $-\frac{۲}{۳}$

گزینه ۴ صحیح است.

$$f(\frac{۳}{۲})=\sqrt{\left[\frac{۳}{۲}\right]+۱}=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

$$g(\frac{۳}{۲})=\frac{\cos\frac{۳\pi}{۴}}{\left|\frac{۳}{۲}-۳\right|}=\frac{\cos(\pi-\frac{\pi}{۴})}{\frac{۳}{۲}}=\frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=-\frac{\sqrt{۲}}{۳}\Rightarrow (f.g)(\frac{۳}{۲})=f(\frac{۳}{۲}).g(\frac{۳}{۲})=\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۳})=-\frac{۲}{۳}$$

مثال۸۲: اگر $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^۲-۱}}{x-۱}$ **و** $g(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^۲-۱}}{x+۱}$ **باشند،** $D_{f.g}$ **کدام است؟**

۱) $\mathbb{R}-[-۱,۱]$ ۲) $\mathbb{R}-(-۱,۱)$ ۳) $\mathbb{R}$ ٤) $\mathbb{R}-\{-۱,۱\}$

$D_f: x^۲-۱\geq ۰\Rightarrow x\leq -۱$ یا $x\geq ۱$ و $x\neq +۱\Rightarrow x\leq -۱$ یا $x>۱$

$D_g: x^۲-۱\geq ۰\Rightarrow x\leq -۱$ یا $x\geq ۱$ و $x\neq -۱\Rightarrow x<-۱$ یا $x\geq ۱$

$D_{f.g}=D_f\cap D_g=\{x|x<۱$ یا $x>۱\}=\mathbb{R}-[-۱,۱]$

مثال۸۳: اگر $f(x)=\sqrt{۵+\sqrt{۹-x}}$ **و** $g(x)=\sqrt{۵-\sqrt{۹-x}}$ **باشند، دامنه تابع** f.g **کدام است؟**

۱) $(-\infty,۱۶]$ ۲) $[۹,۱۶]$ ۳) $[-۱۶,۵]$ ٤) $[-۱۶,۹]$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال۸۴: با فرض $f(x)=\{(۱,-۱),(۲,۰),(۳,۱)\}$**، نمایش تابع** $g(x)=\dfrac{x^۲}{۱+f(x)}$ **به کدام صورت است؟**

۱) $\left\{(۱,۰),(۳,\frac{۳}{۲})\right\}$ ۲) $\left\{(۲,۴),(۳,\frac{۹}{۲})\right\}$ ۳) $\left\{(۲,۲),(۳,\frac{۹}{۲}),(۱,۰)\right\}$ ٤) $\left\{(۱,۰),(۲,۴),(۳,\frac{۳}{۲})\right\}$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۸۵: اگر $f=\{(-۱,-۱),(۰,۳),(۱,۵),(۲,۰)\}$ **و** $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}$**، برد تابع** $(\frac{f+g}{g})(x)$ **کدام است؟**

۱) $\{۱,۶\}$ **۲)** $\left\{\frac{۱}{۲},۱,۶\right\}$ **۳)** $\{۳,۶\}$ **۴)** $\left\{\frac{۱}{۳},\sqrt{۲}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} D_f=\{-۱,۰,۱,۲\} \\ g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}} \Rightarrow D_g: x>۰ \end{array}\right\} \Rightarrow D_f \cap D_g=\{۱,۲\}$$

$$\frac{D_{f+g}}{g}=D_{f+g}\cap D_g-\{x \mid g(x)=۰\} \Rightarrow \frac{D_{f+g}}{g}=\{۱,۲\}$$

$$(\frac{f+g}{g})(۱)=\frac{f(۱)+g(۱)}{g(۱)}=\frac{۵+۱}{۱}=۶ \quad \text{و} \quad (\frac{f+g}{g})(۲)=\frac{f(۲)+g(۲)}{g(۲)}=\frac{۰+\frac{۱}{\sqrt{۲}}}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}=۱$$

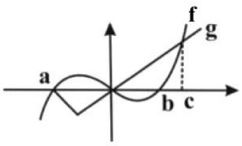
مثال۸۶: اگر $f(x)=\frac{x-۱}{x+۱}$**، آن‌گاه دامنه‌ی تابع** $\frac{g}{f}$ **کدام است؟**

۱) D_g **۲)** $D_g-\{۱\}$ **۳)** $D_g-\{-۱,۱\}$ **۴)** $D_g-\{-۱\}$

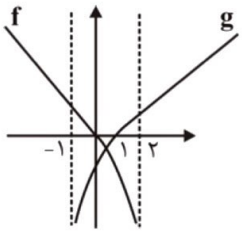
$D_f=R-\{-۱\}$ پس داریم:

$$D_{\frac{g}{f}}=(D_g\cap D_f)-\{x \mid f(x)=۰\}=(D_g\cap(R-\{-۱\}))-\{۱\}=D_g-\{-۱,۱\}$$

مثال۸۷: اگر نمودار f **و** g **بصورت شکل مقابل باشد، دامنه‌ی** $h=\frac{۱}{f-g}$ **را بیابید.**



مثال۸۸: نمودار توابع $y=f(x)$ **و** $y=g(x)$ **در شکل مقابل رسم شده است. دامنه تابع** $\frac{۱+f(x)}{g(x)}$ **کدام است؟**



۱) $[-۱,۲]$ **۲)** $R-\{۲\}$

۳) $(-۱,۲)-\{۱\}$ **۴)** $(-۱,۲)$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال۸۹: اگر $f(x)=x+\sqrt{x+۲}$ **و** $g(x)=\sqrt{x+۲}-x$**، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟**

۱) $(f+g)(x)=۲x$ **۲)** $(f-g)(x)=۲\sqrt{x+۲}$

۳) $x\geq -۲,(f\times g)(x)=-x^{۲}+x+۲$ **٤)** $x\in R,(f\times g)(x)=-x^{۲}+x+۲$

$$(f\times g)(x)=(\sqrt{x+۲}+x)(\sqrt{x+۲}-x)=(x+۲)-x^{۲}=-x^{۲}+x+۲\,,\ D_{f\times g}=D_f\cap D_g=[-۲,+\infty)$$

ترکیب دو تابع

۱) $f(g(x))=fog(x)$ **یعنی در تابع** f **به جای** x **ها ،** $g(x)$ **قرار می‌دهیم.**

۲) $g(f(x))=gof(x)$ **یعنی در تابع** g **به جای** x **ها،** $f(x)$ **را قرار می‌دهیم.**

۳) دامنه‌ی توابع fog **و** gof**:**

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

مثال۹۰: اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۲)\}$ **و** $g=\{(۲,۳),(۱,۵),(۳,۱)\}$ **باشد، تابع** $fof+gog$ **کدام است؟**

۱) $\{(۲,۳),(۳,۷)\}$ **۲)** $\{(۱,۳),(۳,۶)\}$ **۳)** $\{(۲,۳),(۳,۶)\}$ **٤)** $\{(۳,۶),(۱,۵)\}$

$$f=\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۲)\}\Rightarrow fof=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۱)\}$$
$$g=\{(۲,۳),(۱,۵),(۳,۱)\}\Rightarrow gog=\{(۲,۱),(۳,۵)\}$$
$$D_{fof+gog}=D_{fof}\cap D_{gog}=\{۲,۳\}\Rightarrow fof+gog=\{(۲,۳),(۳,۶)\}$$

مثال۹۱: اگر $f=\{(۱,۲),(-۲,۵),(۳,۱)\}$ **و** $g(x)=\sqrt{۵-x}$ **باشد، حاصل** $(fo(۲f-۳g))(۱)$ **کدام است؟**

۱) ۱ **۲)** $\sqrt{۷}$ **۳)** ۵ **٤)** ۲

$$(fo(۲f-۳g))(۱)=f(۲f-۳g))(۱)$$
$$(۲f-۳g)(۱)=۲f(۱)-۳g(۱)=۲\times ۲-۳(\sqrt{۵-۱})=۴-۶=-۲\Rightarrow (fo(۲f-۳g))(۱)=f(-۲)=۵$$

مثال۹۲: اگر $f(x)=\sqrt{\sin\pi x+[\cos ۲\pi x]}$ **و** $g(x)=\dfrac{۱}{x^{۵}-۳f(x)}$ **آن‌گاه حاصل** $gof(۰)$ **کدام است؟**

۱) ۲ **۲)** $-\frac{۱}{۲}$ **۳)** $\frac{۳}{۲}$ **٤)** $\frac{۱}{۲}$

$$gof(۰)=g(f(۰))=g(\sqrt{\sin ۰+[\cos ۰]})=g(۱)=\frac{۱}{۱-۳f(۱)}=\frac{۱}{۱-۳\sqrt{\sin\pi+[\cos ۲\pi]}}=\frac{۱}{۱-۳}=-\frac{۱}{۲}$$

مثال۹۳: عمل یک ماشین در دو مرحله به صورت $x_۰\xrightarrow{f}f(x_۰)\xrightarrow{g}۲$ **می‌باشد و ،** $\frac{۱}{۲}f(x)=g(x)=x-۱$ **،** $x_۰$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۲}$ **۲)** $\frac{۳}{۲}$ **۳)** $\frac{۵}{۲}$ **٤)** ۲

گزینه ۳ صحیح است.

☺مثال۹۴: اگر تابع $f(x)=x-۱$ با دامنه‌ی $[۱\ ,\ ۷]$ و تابع $g(x)=۲x+۱$ با دامنه‌ی $[۲\ ,\ ۵]$ باشند، دامنه‌ی تابع fog کدام است؟

۱) $[۲\ ,\ ۳]$ **۲)** $[۲,۵]$ **۳)** $[۰\ ,\ ۵]$ **٤)** $[۳\ ,\ ۵]$

گزینه ۱ صحیح است.

😐مثال۹۵: گر $D_f=[-۱,۲]$ و $D_g=[-۳,۶]$، آن‌گاه دامنه‌ی تابع $h(x)=۱+۳f(x+۱)-\frac{۱}{۲}g(۳x)$ کدام است؟

۱) $[۰,۲]$ **۲)** $[-۱,۱]$ **۳)** $[-۱,۱۲]$ **٤)** $[۰,۱۲]$

$D_f=[-۱,۲]\Rightarrow -۱\le x+۱\le ۲\Rightarrow -۲\le x\le ۱$

$D_g=[-۳,۶]\Rightarrow -۳\le ۳x\le ۶\Rightarrow -۱\le x\le ۲$

از طرفی جمع تابع با یک عدد و هم‌چنین ضرب آن در یک عدد، تأثیری در دامنه‌ی آن ندارد، بنابراین:

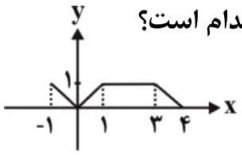
$D_h=D_f\cap D_g=[-۲,۱]\cap[-۱,۲]=[-۱,۱]$

😐مثال۹۶: اگر $g(x)=\frac{x^۲}{x^۲+۱}$ و $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x(۱-x)}}$، دامنه‌ی fog کدام است؟

۱) R **۲)** $(۰\ ,\ ۱)$ **۳)** $R-\{۰\}$ **٤)** $(۰\ ,\ \infty)$

گزینه ۳ صحیح است.

☹مثال۹۷: اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، آن‌گاه دامنه‌ی تابع $g(x)=\frac{f(x-۱)}{f(x)}$ کدام است؟



۱) $(۱,۳)$ **۲)** $[۰,۵]$

۳) $(۰,۴)$ **٤)** $(۰,۲)$

مطابق شکل داده شده $D_f=[-۱,۴]$ بنابراین:

$D_{f(x-۱)}=\{x\mid -۱\le x-۱\le ۴\}=[۰,۵]$

$D_g=(D_{f(x-۱)}\cap D_f)-\{x\mid f(x)=۰\}=[۰,۵]\cap[-۱,۴]-\{۰,۴\}\Rightarrow D_g=[۰,۴]-\{۰,۴\}=(۰,۴)$

مثال۹۸: با فرض $f(x)=\begin{cases}\frac{۲}{\sqrt{۳}} & x \text{ گویا}\\ ax & x \text{ گنگ}\end{cases}$ **و** $g(x)=\begin{cases}\sqrt{۳} & x \text{ گویا}\\ bx & x \text{ گنگ}\end{cases}$ **و** $fog(۲)=۳$ **و** $gof(۲)=۸\sqrt{۳}$ **باشد، آن‌گاه مقدار** a **و** b **کدام است؟**

۱) $\begin{cases}a=\sqrt{۳}\\ b=۱۲\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}a=۲\sqrt{۳}\\ b=۲۴\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}a=۱۲\\ b=\sqrt{۳}\end{cases}$ ٤) $\begin{cases}a=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\\ b=۱\end{cases}$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال۹۹: اگر $f(x)=x-۱$ **و** $g(x)=\sqrt{x}$ **و** $h(x)=x-۱$ **، ضابطه‌ی fogoh کدام است؟**

۱) $\sqrt{x}-۱$ ۲) $\sqrt{x-۱}-۱$ ۳) $\sqrt{x+۱}-۱$ ٤) $\sqrt{x-۱}+۱$

$(fogoh)(x)=f(g(h(x))=f(g(x-۱))=f(\sqrt{x-۱})=\sqrt{x-۱}-۱$

مثال۱۰۰: اگر تابع خطی $y=f(x)$ **از نقاط** $A(۰,-۲)$ **و** $B(۳,۰)$ **بگذرد، آن‌گاه تابع** $fof(x)$ **برابر کدام است؟**

۱) $\frac{۴}{۹}x-\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۲}x-\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}x+\frac{۲}{۳}$ ٤) $۳x+۱$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال۱۰۱: اگر $f(x)=\sin(\frac{\pi x}{۲})$ **و** $g(x)=\cos ۲x$ **باشند، معادله** $fog(x)=۰$ **در بازه** $[۰,\pi]$ **چند ریشه دارد؟**

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۱ ٤) ٤

$f(g(x))=۰\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۲}g(x))=۰\Rightarrow \frac{\pi}{۲}g(x)=k\pi\Rightarrow g(x)=۲k$

$\cos ۲x=۲k\xrightarrow[k=۰]{\text{فقط}}\cos ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k'\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k'\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}=\{\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴}\}$ معادله دو ریشه دارد.

مثال۱۰۲: اگر f **و** g **توابع با ضابطه** $f(x)=x^۲+۲x$ **و** $g(x)=x^۳$ **باشند، معادله** $(gof)(x)=(fog)(x)$ **چند ریشه دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ٤) ٤

$(fog)(x)=(gof)(x)\Rightarrow (x^۲+۲x)^۳=x^۶+۲x^۳\Rightarrow (x(x+۲))^۳=x^۳(x^۳+۲)\Rightarrow x^۳(x+۲)^۳-x^۳(x^۳+۲)=۰\Rightarrow x^۳((x+۲)^۳-(x^۳+۲))=۰\Rightarrow$

$x^۳(x^۳+۶x^۲+۱۲x+۸-x^۳-۲)=۰\Rightarrow \left|\begin{array}{l}x=۰\\ x=-۱\end{array}\right.$

مثال۱۰۳: اگر $f(x)=\begin{cases}۲ & x\in Q\\ ۱ & x\in R-Q\end{cases}$ **، آن‌گاه ضابطه‌ی** $(fof)(x)$ **کدام است؟**

۱) $(fof)(x)=۲$ ۲) $(fof)(x)=۱$

۳) $(fof)(x)=\begin{cases}۱ & x\in Q\\ ۲ & x\in R-Q\end{cases}$ ٤) $(fof)(x)$ **تعریف نشده است.**

$$\begin{cases}x\in Q\Rightarrow f(x)=۲\Rightarrow f(f(x))=f(۲)=۲\\ x\in R-Q\Rightarrow f(x)=۱\Rightarrow f(f(x))=f(۱)=۲\end{cases}\Rightarrow (fof)(x)=۲$$

توجه کنید که دامنه‌ی تابع $(fof)(x)$ برابر R می‌باشد.

مثال۱۰۴: اگر $f(x)=\begin{cases}-۱ & x\in Q\\ \frac{-۱}{۲} & x\notin Q\end{cases}$ **و** $g(x)=[x]$ **باشد آنگاه کدام گزینه همواره صحیح است؟**

۱) $fog(\sqrt{۲})=(۱)$ ۲) $fog(x)=gof(x)$ ۳) $fog(\sqrt{۲})\neq gof(۱)$ ٤) $fog(۱)=۱$

چون $g(x)$ همواره صحیح می‌باشد بنابراین:

$$f\big(g(x)\big)=f\,(\text{عدد صحیح})=-۱\qquad (۱)$$

حال $g\big(f(x)\big)$ را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{cases}x\in Q\ \Rightarrow\ g\big(f(x)\big)=g(-۱)=\lfloor -۱\rfloor=-۱\\ x\notin Q\ \Rightarrow\ g\big(f(x)\big)=g(-\frac{۱}{۲})=\left\lfloor -\frac{۱}{۲}\right\rfloor=-۱\end{cases}\Rightarrow g\big(f(x)\big)=-۱\ (۲)\xRightarrow{(۱)\ ,\ (۲)}\ \Rightarrow\ g\big(f(x)\big)=f\big(g(x)\big)$$

محاسبه $g(x)$ **وقتی** $f(g(x))$ **و** $f(x)$ **معلوم‌اند:**

برای تعیین $g(x)$ وقتی که $f(g(x))$ و $f(x)$ معلوم باشند کافی است $g(x)$ را در $f(x)$ به جای x قرار داده و $f(g(x))$ را تشکیل داده و مساوی $f(g(x))$ داده شده قرار داده و از حل این معادله $g(x)$ را به دست می‌آوریم.

مثال۱۰۵: اگر $f(g(x))=x^۲+۱\ ,\ f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۱}$ **باشد** $g(\circ)$ **کدام است؟**

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ٤) -۲

$$f(g(\cdot))=\frac{۲g(\cdot)+۱}{g(\cdot)-۱}=\cdot+۱\Rightarrow g(\cdot)=-۲$$

مثال۱۰۶: اگر $f(x)=\frac{۱}{x+۳}$ **با شرط آن که** $fog(x)+f(x)=\circ$ **تابع** $g(x)$ **کدام است؟**

۱) $g(x)=-x-۶$ ۲) $g(x)=\frac{۱}{x-۳}$ ۳) $g(x)=\frac{۱}{-x-۶}$ ٤) $g(x)=x+۴$

$$fog(x)+f(x)=\frac{۱}{g(x)+۳}+\frac{۱}{x+۳}=\circ\Rightarrow g(x)+۳=-x-۳\Rightarrow g(x)=-x-۶$$

محاسبه $f(x)$ **وقتی** $f(g(x))$ **و** $g(x)$ **معلوم‌اند:**

روش اول: $g(x)$ را برابر t اختیار کرده و x را بر حسب t در صورت امکان محاسبه می‌کنیم با قرار دادن آن در عبارت $f(g(x))$ و $f(t)$ محاسبه کرد. سپس با تبدیل t به x $f(x)$ مشخص می‌شود.

روش دوم: در این روش سعی می‌کنیم $f(g(x))$ را بر حسب $g(x)$ مرتب کنیم سپس یک جا $g(x)$ را به x تبدیل می‌کنیم.

مثال۱۰۷: $f(g(x))=x^{۲}+x$, $g(x)=\frac{۲x-۳}{x+۱}$ ، $f(x)$ **را پیدا کنید.**

$$\frac{۲x-۳}{x+۱}=t\Rightarrow x=\frac{t+۳}{۲-t}\Rightarrow f(t)=(\frac{t+۳}{۲-t})^{۲}+(\frac{t+۳}{۲-t})\Rightarrow f(x)=(\frac{x+۳}{۲-x})^{۲}+(\frac{x+۳}{۲-x})$$

مثال۱۰۸: اگر $g(x)=۳x^{۲}$ **و** $x\geq ۰$ **و** $fog(x)=۱۲x^{۲}-\sqrt{۱+۹x^{۲}}$ **آن‌گاه** $f(۱)$ **کدام است؟**

۱) ۱ **۲) ۲** **۳) ۳** **۴) ٤**

$$fog(x)=f(g(x))=f(۳x^{۲})=۱۲x^{۲}-\sqrt{۱+۹x^{۲}}\Rightarrow f(۳x^{۲})=۴(۳x^{۲})-\sqrt{۱+۳(۳x^{۲})}\Rightarrow f(t)=۴t-\sqrt{۱+۳t}\Rightarrow f(۱)=۴-\sqrt{۴}=۴-۲=۲$$

مثال۱۰۹: اگر $f(x)=\frac{x}{۲-x}$ **و** $(gof)(x)=\frac{۱}{۲}x$**، ضابطه‌ی تابع** g **برابر کدام است؟** **(خارج از کشور-۸٤)**

۱) $\frac{x}{x+۱}$ **۲)** $\frac{x-۱}{x}$ **۳)** $\frac{x}{x-۱}$ **٤)** $\frac{x+۱}{x}$

با در نظر گرفتن $\frac{x}{۲-x}=t$ داریم:

حال با در دست داشتن نتیجه‌ی محاسبات فوق می‌توان نوشت: $\frac{x}{۲-x}=t\Rightarrow ۲t-xt=x\Rightarrow xt+x=۲t\Rightarrow (t+۱)x=۲t\Rightarrow x=\frac{۲t}{t+۱}$

$$g(\frac{x}{۲-x})=\frac{۱}{۲}x\Rightarrow g(t)=\frac{۱}{۲}(\frac{۲t}{t+۱})\Rightarrow g(t)=\frac{t}{t+۱}\xrightarrow{t\to x}g(x)=\frac{x}{x+۱}$$

روش دوم: با استفاده از عددگذاری برای پیدا کردن گزینه‌ی صحیح داریم:

$$x=۱\Rightarrow f(۱)=۱\Rightarrow g(f(۱))=g(۱)=\frac{۱}{۲}$$

حال در گزینه‌ها $x=۱$ را جایگذاری می‌کنیم که به ترتیب $\frac{۱}{۲}$، ۰، تعریف نشده و ۲ به دست می‌آید. بنابراین گزینه‌ی (۱) پاسخ صحیح است.

مثال۱۱۰: اگر دامنه‌ی توابع f **و** g **هر کدام** R **باشد و** $f(x+۱)=۲+۳x$ **و** $g(x+۲)=-۵-۳x$**، آن‌گاه دامنه و برد** $h(x)=\frac{f(x)+۱}{g(x)+۲}$ **کدام است؟**

۱) $\begin{cases}D_h=(-\infty,۲)\cup(۲,+\infty)\\R_h=(-\infty,-۲)\cup(-۲,+\infty)\end{cases}$

۲) $\begin{cases}D_h=(-\infty,۰)\cup(۰,+\infty)\\R_h=\{۱\}\end{cases}$

۳) $\begin{cases}D_h=(-\infty,۱)\cup(۱,+\infty)\\R_h=(-\infty,-۱)\cup(-۱,+\infty)\end{cases}$

٤) $\begin{cases}D_h=(-\infty,۰)\cup(۰,+\infty)\\R_h=\{-۱\}\end{cases}$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال۱۱۱: اگر $f(\sqrt{2}\sin x)=\cos 2x$ **باشد، آن‌گاه** $f(\cos x)$ **برابر است با:**

۱) $\sin^2 x$ ۲) $\cos^2 x$ ۳) $2\sin^2 x$ ٤) $2\cos^2 x$

$$f(\sqrt{2}\sin x)=\cos 2x \Rightarrow f(\sqrt{2}\sin x)=1-2\sin^2 x=1-(\sqrt{2}\sin x)^2 \xrightarrow{\sqrt{2}\sin x=t} f(t)=1-t^2 \Rightarrow f(\cos x)=1-\cos^2 x=\sin^2 x$$

مثال۱۱۲: اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^2-\frac{1}{x^2}$ **باشد،** $f(x)$ **کدامست؟**

۱) x^2 ۲) x^2-1 ۳) x^2-2 ٤) 1

$$f(x+\frac{1}{x})=x^2-\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2\times x\times\frac{1}{x}=(x+\frac{1}{x})^2-2 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=t \Rightarrow f(t)=t^2-2 \Rightarrow f(x)=x^2-2$$

مثال۱۱۳: اگر $f(\sin x+\cos x)=4\cos^2(x-\frac{\pi}{4})$ **باشد،** $f(x)$ **کدام است؟**

۱) x^2 ۲) $\cos x$ ۳) $\sin x$ ٤) $2x^2$

گزینه ۴ صحیح است.

محاسبه $f(x)$ **هنگامی که** $a(f(h(x)))+b(f(kx))$ **معلوم باشد:**

باید تبدیلی صورت گیرد که $h(x)$ **و** $k(x)$ **به یکدیگر تبدیل شود سپس دستگاه حاصل را حل کنیم و** $f(x)$ **را محاسبه کنیم.**

مثال۱۱۴: اگر $f(-x)+2f(x)=x^2$ **،** $f(x)$ **کدام است؟**

۱) x^2+1 ۲) $\frac{1}{3}x^2$ ۳) x^2 ٤) $2x^2$

$$-2\begin{cases} f(-x)+2f(x)=x^2 \\ f(x)+2f(-x)=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2f(-x)-4f(x)=-2x^2 \\ f(x)+2f(-x)=x^2 \end{cases} \Rightarrow -3f(x)=-x^2 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^2$$

مثال۱۱۵: اگر مبدأ مختصات در ضابطه‌ی تابع $f(x)$ **صدق کند و** $4f(x+2)-f(x)=8$ **، آن‌گاه مقدار** $f(4)$ **کدام است؟**

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳/۵ ٤) ۱/۵-

از آنجایی که $f(0)=0$ ، پس داریم:

$$4f(0+2)-f(0)=8 \Rightarrow 4f(2)=8 \Rightarrow f(2)=2$$
$$x=2 \Rightarrow 4f(2+2)-f(2)=8 \Rightarrow 4f(4)-f(2)=8$$
$$\xrightarrow{f(2)=2} 4f(4)=10 \Rightarrow f(4)=\frac{10}{4}=2/5$$

مثال۱۱۶: به ازای هر $x \neq ۰$ ، $۴f(\frac{۱}{x}) - f(x) = x^۲ + \frac{۱}{x^۲}$ ، $f(۲)$ چقدر است؟

در رابطه فرض x را به $\frac{۱}{x}$ تبدیل سپس $f(\frac{۱}{x})$ را بین دو معادله حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۴f(\frac{۱}{x}) - f(x) = x^۲ + \frac{۱}{x^۲} \\ ۴f(x) - f(\frac{۱}{x}) = \frac{۱}{x^۲} + x^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴f(\frac{۱}{x}) - f(x) = x^۲ + \frac{۱}{x^۲} \\ ۱۶f(x) - ۴f(\frac{۱}{x}) = ۴(x^۲ + \frac{۱}{x^۲}) \end{cases} \Rightarrow ۱۵f(x) = ۵f(x^۲ + \frac{۱}{x^۲}) \Rightarrow f(x) = \frac{۱}{۳}(x^۲ + \frac{۱}{x^۲}) \Rightarrow f(۲) = \frac{۱۷}{۱۲}$$

مثال۱۱۷: f تابعی حقیقی است و به ازای هر x و y داریم $f(x+y) = f(x) + f(y)$ اگر $f(a) = -۵k$ و $f(b) = ۶۰$ و $f(۳a + ۲b) = ۳۰$، مقدار k کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۶- ۳) ۹ ۴) ۹-

$x = y \Rightarrow f(۲x) = ۲f(x)$

$y = ۲x \Rightarrow f(۳x) = f(x) + f(۲x) = f(x) + ۲f(x) = ۳f(x)$

$f(۳a + ۲b) = f(۳a) + f(۲b) = ۳f(a) + ۲f(b) \Rightarrow ۳۰ = -۱۵k + ۱۲۰ \Rightarrow k = ۶$

مثال۱۱۸: دو تابع f و g به صورت مجموعه‌ی زوج‌های مرتب بیان شده‌اند. در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟ (خارج از کشور -۸۵)

۱) $f \cup g$ ۲) $f \cap g$ ۳) $f - g$ ۴) fog

اجتماع دو تابع ممکن است تابع نباشد. مثلا اجتماع دو تابع $f = \{(۰,۱)\}$ و $g = \{(۰,۲)\}$ تابع نیست زیرا $f \cup g = \{(۰,۱),(۰,۲)\}$ است که در آن به ازای $x = ۰$ دو مقدار y به دست آمده است. پس گزینه‌ی (۱) پاسخ است.

حال به بررسی سایر گزینه‌ها می‌پردازیم:

ترکیب دو تابع همواره تابع است (هم fog، هم gof). تمام زیرمجموعه‌های یک تابع نیز الزاما تابع‌اند، در نتیجه $f \cap g$ که زیرمجموعه‌ی تابع f (و هم‌چنین تابع g) می‌باشد هم بی‌شک تابع است. $f - g$ نیز زیرمجموعه‌ی تابع f است پس الزاما تابع است.

(توجه کنید که با توجه به گزینه‌های (۱) و (۲) به نظر می‌رسد منظور از $f - g$ عمل تفاضل روی مجموعه‌ها است. اما حتی اگر منظور از $f - g$ یکی از چهار عمل اصلی بین توابع نیز باشد، باز هم جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو تابع الزاما تابع تولید می‌کند.)

مثال۱۱۹: اگر $f(x) = x - [x]$ و $g(x) = \frac{۱-x}{x}$، برد تابع gof کدام بازه است؟ (خارج ازکشور-۸۶)

۱) $(۰,+\infty)$ ۲) $[۰,+\infty)$ ۳) $(۱,+\infty)$ ۴) $[۱,+\infty)$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال۱۲۰: اگر f و g توابعی چند جمله‌ای و $fofof$ از درجه ۸ و g از درجه ۳ باشد، تابع $fofog$ از درجه چند است؟

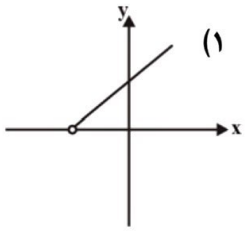
۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

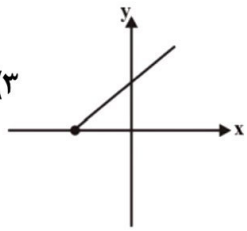
نکته: اگر f از درجه n و g از درجه m باشد آن‌گاه fog و gof از درجه $n\times m$ می‌باشند و $f\times g$ از درجه $n+m$ و $f\pm g$ از درجه n یا m می‌باشد.

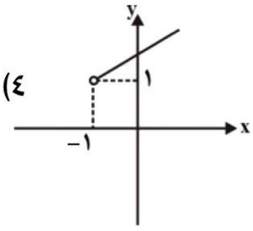
$$\begin{cases} g \text{ از درجه } ۳ \\ fofof \text{ از درجه } ۸ \Rightarrow f \text{ از درجه } ۲ \Rightarrow fof \text{ از درجه } ۴ \end{cases}$$

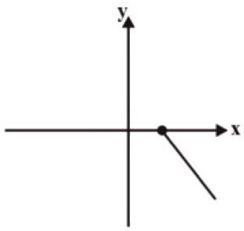
$\Rightarrow fofog$ از درجه ۱۲ مـی باشـد

مثال۱۲۱: با فرض $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲}$ نمودار تابع $y=gof(x+۲)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


گزینه ۱ صحیح است.

تابع یک به یک

۱- f تابعی یک به یک است هرگاه هیچ y ایی با دو x متمایز وجود نداشته باشد.

۲- از دید ریاضی f یک به یک است هرگاه $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

۳- از دید نمودار مختصاتی زمانی تابع یک به یک تعریف می‌شود که هر خط موازی محور xها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

٤- از دید چند ضابطه‌ای‌ها وقتی تابع یک به یک تعریف می‌شود که دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) تک‌تک ضابطه‌ها یک به یک باشند.

ب) اشتراک برد دوبه دو ضابطه‌ها تهی باشد.

☺مثال۱۲۲: کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟

۱) $x \geq 0 , y=x^2-1$ **۲)** $x \leq 2 , y=-x^2+2$ **۳)** $y=|x|$ **٤)** $y=x^3+x^2$

گزینه ۱ صحیح است.

☹مثال۱۲۳: اگر رابطه $f=\{(2,2a-1),(3b^2-4a,1),(2,2-a),(b\sqrt{2},5)\}$ **تابعی یک به یک باشد، مقادیر** a **و** b **کدام است؟**

۱) $\begin{cases} a=1 \\ b=\pm\sqrt{2} \end{cases}$ **۲)** $\begin{cases} a=1 \\ b=\sqrt{2} \end{cases}$ **۳)** $\begin{cases} a=1 \\ b=-\sqrt{2} \end{cases}$ **٤)** $\begin{cases} a=-1 \\ b=\pm\sqrt{2} \end{cases}$

گزینه ۳ صحیح است.

☹مثال۱۲۴:کدام‌یک از تابع‌های زیر یک به یک نمی‌باشد؟

۱) $f(x)=3^x$ **۲)** $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **۳)** $f(x)=x+\sqrt{x}$ **٤)** $f(x)=x^2-6x+1$

$f(x)=x^2-6x+1$ ضابطه‌ی یک سهمی یا تابع درجه‌ی دوم است که هیچ‌گاه یک به یک نمی‌باشد.

$$f(x)=x^2-6x+1 , f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1^2-6x_1+1=x_2^2-6x_2+1$$

$$\Rightarrow (x_1^2-x_2^2)-6(x_1-x_2)=0 \Rightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=x_2 \\ x_1=6-x_2 \end{cases}$$

☺مثال۱۲۵: اگر f تابعی یک به یک روی R باشد و $f(f(x-۱))=f(۲x+۳)$، آن‌گاه $f(۱)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۲ ٤) ۷

f یک به یک است، پس داریم:

$$f(f(x-۱))=f(۲x+۳)\Rightarrow f(x-۱)=۲x+۳\xrightarrow{x=۲}f(۲-۱)=f(۱)=۴+۳=۷$$

☺مثال۱۲۶: یک به یک بودن تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{x} & , x\le ۰\\ x^۲-۱ & , x\ge ۰\end{cases}$ را بررسی کنید.

☹مثال۱۲۷: به ازای کدام مقدار m تابع $f(x)=\begin{cases}۳x+m & x\le ۲\\ ۲x+۵ & x>۲\end{cases}$ یک به یک است؟

۱) $m>۳$ ۲) $m\ge ۳$ ۳) $m<۳$ ٤) $m\le ۳$

گزینه ۴ صحیح است.

تابع پوشا:

۱- اگر $f:A\to B$ تعریف شده باشد بطوری که A مجموعه دامنه و B مجموعه هم دامنه باشد تابع پوشاست هرگاه مجموعه مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تابع f یعنی همان برد برابر با مجموعه هم دامنه باشد.
۲- از دید نموداری تابع زمانی پوشاست که هر خط موازی محور xها نمودار را حداقل در یک نقطه قطع کند.
۳- از دید چند ضابطه‌ای‌ها زمانی تابع پوشاست که اجتماع برد تک‌تک ضابطه‌ها برابر مجموعه هم دامنه شود.
٤- تابعی که هم پوشاست و هم یک به یک باشد دو سوئی نامند.

☺مثال۱۲۸: تابع $f:A\to B$ که در آن $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{-۳,-۲,-۱\}$ می‌باشد، به صورت زوج مرتب‌های زیر تعریف شده‌اند. $f=\{(۳,-۱),(x,y),(۱,-۳)\}$ با جای‌گذاری کدام زوج مرتب زیر به جای (x,y) تابع f یک به یک و پوشا می‌گردد؟

۱) $(۲,-۲)$ ۲) $(۲,-۱)$ ۳) $(۱,-۱)$ ٤) $(۳,-۲)$

با توجه به پوشا بودن تابع f باید برد آن با هم دامنه (B) یکی باشد که در این صورت چون فقط عدد (۲-) در برد نیست پس مولفه دوم را برابر (۲-) قرار می‌دهیم. بنابراین مولفه اول برای رعایت شرط یک به یک بودن تابع می‌تواند مقدار ۲ را اختیار کند در نتیجه برای زوج مرتب (x,y) حالت $(۲,-۲)$ قابل قبول خواهد بود.

مثال۱۲۹:کدام گزینه در مورد تابع $\begin{cases} f:[۲,+\infty)\to R \\ f(x)=|x-۱|+\sqrt{x-۲} \end{cases}$ **درست است؟**

۱) یک به یک و پوشا است. **۲) یک به یک و پوشا نیست.**

۳) یک به یک نیست و پوشا است. **٤) یک به یک است و پوشا نیست.**

گزینه ۴ صحیح است.

مثال۱۳۰:تابع $g;\mathbb{N}\to Z$ **با ضابطه** $g(x)=\begin{cases} \frac{-n}{۲} & n \text{ زوج} \\ \frac{n-۱}{۲} & n \text{ فرد} \end{cases}$ **مفروض است. این تابع در کدام شرایط صدق می‌کند؟**

۱) پوششی و یک به یک **۲) نه پوششی نه یک به یک**

۳) پوششی است ولی یک به یک نیست. **٤) یک به یک است ولی پوششی نیست.**

گزینه ۱ صحیح است.

مثال۱۳۱: تابع $\begin{cases} (-\infty,+\infty)\to[۳۵,+\infty) \\ f(x)=۲^{x^۲+۵} \end{cases}$ **چگونه است؟**

۱) یک به یک و پوشاست. **۲) نه یک به یک و نه پوشاست.** **۳) یک به یک و پوشا نیست.** **٤) یک به یک نیست ولی پوشاست.**

$$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow ۲^{x_۱^۲+۵}=۲^{x_۲^۲+۵}\Rightarrow ۲^{x_۱^۲}\times ۲^۵=۲^{x_۲^۲}\times ۲^۵\Rightarrow ۲^{x_۱^۲}=۲^{x_۲^۲}\Rightarrow x_۱^۲=x_۲^۲\Rightarrow x_۱=\pm x_۲$$

یک به یک نیست.

از آنجا که $f(x)$ یک تابع نمایی بوده و پایه آن مثبت (۲) می‌باشد. لذا کمترین مقدار آن زمانی است که توان آن کمترین مقدار را داشته باشد. اما از آنجا که توان مقداری بزرگتر یا مساوی ۵ است لذا کمترین مقدار آن ۵ بوده و کمترین مقدار $f(x)$ ، $۲^۵$ یعنی ۳۲ می‌باشد. بدیهی است با افزایش توان، مقدار $f(x)$ نیز افزایش یافته و به سمت $+\infty$ می‌رود پس $۳۲\le f(x)<+\infty$ و لذا کل برد تعریف شده برای تابع پوشش داده می‌شود و در نتیجه f پوششی است.

☹مثال۱۳۲: تابع $\begin{cases} R \to z-\{0\} \\ f(x)=\dfrac{1}{[x-1]} \end{cases}$ **از نظر پوشا بودن چگونه است؟**

$$f(x)=\frac{1}{[x-1]}=\frac{1}{[x]-1}=y \Rightarrow y[x]-y=1 \Rightarrow [x]=\frac{y+1}{y}\ ,\ y\neq 0 \Rightarrow [x]=1+\frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{y}\in z \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y\notin z, y=\frac{1}{t}(t\in z) \end{cases}$$

پس مقادیر اختیار شده توسط y یا برابر ۱ بوده و یا متعلق به z نیستند. پس تابع f پوشا نیست.

😐مثال۱۳۳: تابع $\begin{cases} R \to [0,\sqrt{5}] \\ f(x)=\sin x+2\cos x \end{cases}$ **از نظر پوشا بودن بررسی کنید.**

تابع معکوس

هرگاه f تابعی یک به یک باشد در صورتی که جای x و y را عوض کنیم تابع جدیدی بدست می‌آید که آن‌را معکوس تابع f گویند و با نماد f^{-1} نشان می‌دهند.

برای بدست آوردن ضابطه معکوس تابع کافیست x را برحسب y پیدا کنیم.

نکات مربوط به تابع معکوس:

۱- $(a\ ,\ b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$

۲- $y=f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

۳- $fof^{-1}(x)=f(f^{-1}(x))=x$

٤- $f^{-1}of(x)=f^{-1}(f(x))=x$

۵- $D_f=R_{f^{-1}}\ ,\ R_f=D_{f^{-1}}$

٦- نمودار تابع f^{-1} همان نمودار f است که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه شده است.

۷- اگر f تابعی صعودی یا اکیداً صعودی باشد، f^{-1} نیز صعودی یا اکیداً صعودی است.

۸- اگر f تابعی نزولی یا اکیداً نزولی باشد، f^{-1} نیز نزولی یا اکیداً نزولی است.

۹- $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$ $\qquad$ $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$

۱۰- در تابع هموگرافیک $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ **در صورتی که** $a+d=0$ **باشد، آن‌گاه:** $f^{-1}(x)=f(x)$

۱۱- اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، تابع معکوس نیز در صورت وجود، فرد است.

۱۲- نقاط تقاطع تابع $f(x)$ و تابع معکوس معمولاً روی خط $y=x$ قرار می‌گیرد، پس برای یافتن نقاط تقاطع f و f^{-1} راحت‌تر آن است که $f(x)$ را با $y=x$ قطع دهیم.

۱۳- در صورتی که $fog(x)=gof(x)$ باشد، f و g معکوس یکدیگر می‌باشند.

۱٤- هرگاه $f'>0$ یا $f'\geq 0$ ، $f'<0$ یا $f'\leq 0$ تابع یکنوا و یک به یک است در نتیجه معکوس‌پذیر است.

مثال۱۳۴: اگر $f(x)=3x+\sin(x-2)$ **باشد، حاصل** $f(2)+f^{-1}(6)$ **کدام است؟**

۱) 0 **۲)** 4 **۳)** 6 **۴)** 8

گزینه ۴ صحیح است.

مثال۱۳۵: اگر $g(x)=f(3f(x^3))$ **و** $f,f(8)=2,f(6)=1$ **وارون پذیر باشد** $g^{-1}(1)$ **کدام است؟**

۱) 1 **۲)** 2 **۳)** 8 **۴)** 36

$$x=2\Rightarrow g(2)=f(3f\underbrace{(2^3)}_{\underbrace{f(8)}_{2}})=\underbrace{f(6)}_{1}\Rightarrow g(2)=1\Rightarrow g^{-1}(1)=2$$

مثال۱۳۶: در تابع $y=x^3+x+1$ **اگر** A **محل برخورد** f^{-1} **با محور** x **ها و** A' **متناظر** A **روی** f **باشد طول** AA' **کدام است؟**

۱) صفر **۲)** 1 **۳)** $\sqrt{2}$ **۴)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$A\in f^{-1}\Rightarrow (a,0)\in f^{-1}\Rightarrow (0,a)\in f\Rightarrow a=0+0+1=1\Rightarrow A(1,0)\in f^{-1}\ ,\ A'(0,1)\in f\Rightarrow AA'=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

مثال۱۳۷: تابع f **با ضابطه** $x<2$ **و** $f(x)=x^2+Ax+3$ **دارای وارون است اگر** $f^{-1}(8)=-1$ **آنگاه** $f^{-1}(\frac{5}{4})$ **کدام است ؟**

۱) 1 **۲)** $\frac{1}{2}$ **۳)** $\frac{-1}{2}$ **۴)** -1

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۱۳۸: اگر $f=\{(1,2),(-1,0),(-2,3)\}$ **و** $g=\{(-2,1),(1,0)\}$ **باشند، حاصل** $g^{-1}of(-1)+fog^{-1}(1)$ **کدام است؟**

۱) تعریف نشده **۲)** 4 **۳)** 3 **۴)** 2

$$g^{-1}of(-1)+fog^{-1}(1)=g^{-1}(0)+f(-2)=1+3=4$$

مثال۱۳۹: اگر $f(x)=ax^3+b$ **مفروض باشد و نمودارهای** f **و** f^{-1} **در نقطه** $A(1,0)$ **متقاطع باشند** $a+b$ **کدام است؟**

۱) 1 **۲)** -1 **۳)** صفر **۴)** 2

$$f(x)=ax^3+b\ \ (1,0)\in f,f^{-1}\Rightarrow\begin{cases}(1,0)\in f\Rightarrow a+b=0\\(1,0)\in f^{-1}\Rightarrow(0,1)\in f\Rightarrow b=1\end{cases}\Rightarrow a=-1\Rightarrow 2a-b=-3$$

مثال۱۴۰: اگر $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$ **آن‌گاه** $f^{-1}(1)+f^{-1}(-\sqrt{3})$ **برابر کدام است؟**

۱) ۲ **۲) ۲-** **۳) ۳-** **۴) ۱**

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۱۴۱: اگر $f(x)=\frac{x}{x+2}$ **و معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله** $f(x)-f^{-1}(x)=0$ **کدام است؟**

۱) ۵- **۲) ۲** **۳) ۳** **۴) ۰**

$$y=\frac{x}{x+2}\Rightarrow xy+2y=x\Rightarrow x=\frac{2y}{1-y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x}{1-x}$$

$$f(x)=f^{-1}(x)\Rightarrow\frac{x}{x+2}=\frac{2x}{1-x}\Rightarrow x(1-x)=2x(x+2)\Rightarrow x(1-x-2x-4)=0\Rightarrow x(-3-3x)=0\Rightarrow x_1=0,\ x_2=-1\Rightarrow x_1x_2=0$$

مثال۱۴۲: اگر $f=\{(x,y)|x\in\mathbb{N},y=3x-1,x\le 20\}$ **در این صورت** $(fof^{-1})\cap(f^{-1}of)$ **مجموعه چندعضوی است؟**

۱) ۰ **۲) ۶** **۳) ۷** **۴) ۸**

گزینه ۳ صحیح است.

مثال۱۴۳: دامنه‌ی تابع معکوس $y=\sqrt{3-\sqrt{x-1}}$ **کدام است؟**

۱) $[0,2]$ **۲)** $[1,10]$ **۳)** $[0,\sqrt{3}]$ **۴)** $[1,+\infty)$

گزینه ۳ صحیح است.

☹مثال۱۴۴: تابع وارون تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x}+1$ کدام است؟

۱) $y=x^3-1$ ۲) $y=\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x}+1$

۳) $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x+2}-1$ ٤) $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-2}+1$

$$y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x}+1$$
$$y-1=\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x}\Rightarrow(y-1)^3=(x^3-3x^2+3x-1)+1\Rightarrow(y-1)^3-1=(x-1)^3\Rightarrow x-1=\sqrt[3]{(y-1)^3-1}$$
$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{(y-1)^3-1}+1\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{(x-1)^3-1}+1\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-2}+1$$

☹مثال۱۴۵: ضابطه‌ی تابع معکوس تابع $f(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$ کدام است؟ $(x>1)$

۱) $x+\sqrt{x^2+1}$ ۲) $x-\sqrt{x^2+1}$ ۳) $x+\sqrt{x^2-1}$ ٤) $x-\sqrt{x^2-1}$

برای پیدا کردن ضابطه‌ی تابع وارون، ابتدا **x** را بر حسب **y** پیدا می‌کنیم و سپس جای **x** و **y** را عوض می‌کنیم.

روش اول :

با توجه به ضابطه‌ی تابع $x>1$ و $y=f(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$ می‌توانیم ضابطه‌ی تابع معکوس تابع **f** رابه صورت زیر به دست آوریم:

$$y=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})\Rightarrow 2y=\frac{x^2+1}{x}\Rightarrow x^2-2yx+1=0$$
$$\Rightarrow x=y\pm\sqrt{y^2-1}\Rightarrow f^{-1}(x)=x\pm\sqrt{x^2-1}$$

حال با توجه به این که دامنه‌ی تابع **f** بازه‌ی $(1,+\infty)$ است و به ازای $x>1$ داریم $x+\frac{1}{x}>2$ و $\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})>1$ پس دامنه‌ی تابع f^{-1} بازه‌ی $(1,+\infty)$ و برد تابع $f^{-1}(x)$ بازه‌ی $(1,+\infty)$ است. (دامنه‌ی f^{-1} برابر برد **f** است) بنابراین از بین دو ضابطه‌ی $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ و $f^{-1}(x)=x-\sqrt{x^2-1}$ باید آن را انتخاب کنیم که حاصلی بزرگ‌تر از ۱ داشته باشد و از آن جا که همواره $x+\sqrt{x^2-1}>1$ پس ضابطه‌ی $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ قابل قبول است.

روش دوم:

با توجه به این که اگر $f(a)=b$ باشد $f^{-1}(b)=a$ است کافی است با انتخاب یک عدد برای **x** مقدار **y** را در تابع پیدا کنیم و مختصات نقطه‌ی متناظر با آن را در هر کدام از گزینه‌ها بررسی کنیم، در تابع $f(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$ با انتخاب $x=2$ داریم $y=\frac{1}{2}(2+\frac{1}{2})=\frac{5}{4}$ حال مختصات نقطه‌ی $(2,\frac{5}{4})$ را در گزینه‌ها بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): $y=x+\sqrt{x^2+1}$ $\quad 2\neq\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{25}{16}+1}$

گزینه‌ی (۲): $y=x-\sqrt{x^2+1}$ $\quad 2\neq\frac{5}{4}\sqrt{\frac{25}{16}+1}$

گزینه‌ی (۳): $y=x+\sqrt{x^2-1}$ $\quad 2=\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{25}{16}-1}$

گزینه‌ی (۴): $y=x-\sqrt{x^2-1}$ $\quad 2\neq\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{25}{16}-1}$

😐مثال۱۴۶: اگر f تابع یک به یک باشد، معکوس تابع $h(x)=f^{-1}(\frac{x+1}{x})$ کدام است؟

۱) $\frac{f(x)}{1-f(x)}$ ۲) $\frac{1}{f(x)-1}$ ۳) $f(\frac{1}{x-1})$ ٤) $f(\frac{x}{1-x})$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۱۴۷: اگر $f^{-1}(x)$ تابع وارون تابع $f(x)$ باشد ضابطه‌ی تابع وارون تابع $g(x)=\frac{2f(x)}{1+f(x)}$ کدام است؟

۱) $g^{-1}(x)=f^{-1}(\frac{x}{2+x})$ ۲) $g^{-1}(x)=\frac{f^{-1}(x)}{2+f^{-1}(x)}$ ۳) $g^{-1}(x)=\frac{f^{-1}(x)}{2-f^{-1}(x)}$ ٤) $g^{-1}(x)=f^{-1}(\frac{x}{2-x})$

$$g(x)=y\Rightarrow x=g^{-1}(y)$$

$$y+yf(x)=2f(x)\Rightarrow f(x)=\frac{y}{2-y}\Rightarrow f^{-1}(\frac{y}{2-y})=x\Rightarrow g^{-1}(y)=f^{-1}(\frac{y}{2-y})\Rightarrow g^{-1}(x)=f^{-1}(\frac{x}{2-x})$$

مثال۱۴۸: نمودار تابع $f(x)=\frac{x-1}{x+3}$ با نمودار تابع f^{-1} :

۱) در دو نقطه‌ی متمایز تلاقی دارند. **۲) تلاقی ندارند**

۳) در یک نقطه مماس شوند **٤) در ٤ نقطه تلاقی دارند.**

تابع را با $y=x$ قطع می‌دهیم.

$$\frac{x-1}{x+3}=x\Rightarrow x-1=x^2+3x\Rightarrow x^2+2x+1=0\Rightarrow (x+1)^2=0\Rightarrow x=-1$$

در $x=-1$ بر هم مماس می‌شوند.

مثال۱۴۹: ضابطه تابع معکوس تابع $f(x)=\begin{cases}1-2x^2 & x\geq 0\\ 3-\frac{x}{2} & x<0\end{cases}$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{1-x}{2}} & x\geq 0\\ 6-2x & x<0\end{cases}$ ۲) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1-x}}{2} & x\leq 1\\ 6-2x & x>3\end{cases}$

۳) $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{\frac{1-x}{2}} & x\geq 0\\ 6-2x & x<0\end{cases}$ ٤) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{1-x}{2}} & x\leq 1\\ 6-2x & x>3\end{cases}$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۱۵۰: اگر g وارون‌پذیر و $f(x)=\sqrt[3]{2+g^{-1}(x^5)}$ با شرط آن‌که $g^{-1}(32)=6$ باشد، آن‌گاه حاصل $f^{-1}(2)$ کدام است؟

۱) ٤ ۲) ۳ ۳) ٥ ٤) ۲

اگر $f^{-1}(2)=\alpha$ باشد، داریم $f(\alpha)=2$ با توجه به رابطه $f(x)=\sqrt[3]{2+g^{-1}(x^5)}$ داریم:

$$f(\alpha)=\sqrt[3]{2+g^{-1}(\alpha^5)}=2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2+g^{-1}(\alpha^5)=8 \Rightarrow \begin{cases} g^{-1}(\alpha^5)=6 \\ g^{-1}(32)=6 \end{cases} \Rightarrow g^{-1}(\alpha^5)=g^{-1}(32)$$

چون g وارون‌پذیر است لذا یک به یک هست داریم:

$$\alpha^5=32 \Rightarrow \alpha=2 \Rightarrow f^{-1}(2)=2$$

مثال۱۵۱: اگر تابع $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-mx+1}$ معکوس پذیر باشد آن‌گاه منحنی معکوس آن از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(2,3)$ ۲) $(2,-1)$ ۳) $(-1,\frac{1}{2})$ ٤) $(3,2)$

چون $f(0)=f(1)=0$ بنابراین تابع نمی‌تواند معکوس پذیر باشد زیرا خط $y=0$ تابع را در ۲ نقطه قطع می‌کند. مگر این که $x=0$ یا $x=1$ ریشه مخرج باشند. چون در مخرج عدد ثابت ۱ وجود دارد پس $x=0$ ریشه مخرج نیست. بنابراین باید $x=1$ ریشه مخرج باشد.

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-2x+1} \Rightarrow f(x)=\frac{x(x-1)}{(x-1)^2} \Rightarrow f(x)=\frac{x}{x-1}$$

جای **x** و **y** را در گزینه‌ها عوض کرده و در معادله قرار می‌دهیم بنابراین نقطه $(-1\ \frac{1}{2})$ قابل قبول می‌باشد.

مثال۱۵۲: معکوس تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\log_2(\frac{1+x}{1-x})$ ۲) $f^{-1}(x)=\log_2(\frac{1-x}{1+x})$ ۳) $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\log_2(\frac{1+x}{1-x})$ ٤) $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\log_2(\frac{1-x}{1+x})$

$$y=\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}} \Rightarrow y=\frac{2^{2x}-1}{2^{2x}+1} \Rightarrow 2^{2x}y+y=2^{2x}-1 \Rightarrow y+1=2^{2x}(1-y) \Rightarrow 2^{2x}=\frac{1+y}{1-y} \Rightarrow 2x=\log_2(\frac{1+y}{1-y})$$
$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}\log_2(\frac{1+y}{1-y}) \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\log_2(\frac{1+x}{1-x})$$

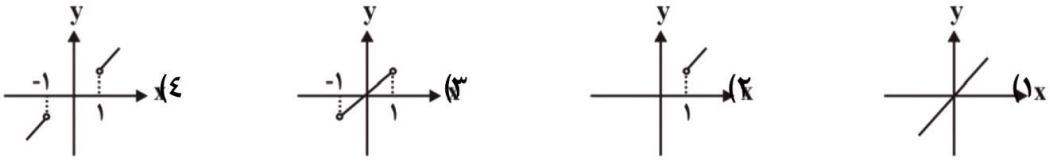
مثال۱۵۳: اگر معکوس تابع $f(x)=\dfrac{ax}{bx+c}$ به صورت $f^{-1}(x)=\dfrac{4x}{2-x}$ باشد، آن‌گاه $a+b+c$ کدام است؟

۱) ٥ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ٤) ٦

می‌دانیم که $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$، در نتیجه داریم:

$$y=\frac{4x}{2-x} \Rightarrow 2y-xy=4x \Rightarrow x(y+4)=2y \Rightarrow x=\frac{2y}{y+4} \Rightarrow y=f(x)=\frac{2x}{x+4} \Rightarrow a+b+c=2+1+4=7$$

مثال۱۵۴: اگر داشته باشیم $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ در این صورت نمودار تابع $fof^{-1}(x)$ کدام است؟



به ازای هر $x \in D_{f^{-1}}$ داریم: $fof^{-1}(x) = x$

بنابراین $fof^{-1}(x)$ تابع همانی با دامنه‌ی $D_{f^{-1}} = R_f$ است. پس برد **f** را می‌یابیم:

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow x^2y^2 + y^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \geq 0 \Rightarrow 1-y^2 > 0 \Rightarrow -1 < y < 1 \Rightarrow R_f = (-1,1)$$

تابع زوج و فرد:

۱- تابع زوج می‌باشد هرگاه دو شرط زیر را دارا باشد:

الف) دامنه تابع متقارن باشد یعنی:

$$\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$$

ب) $f(-x) = f(x)$

۲- تابع فرد می‌باشد هرگاه دو شرط زیر را دارا باشد:

الف) دامنه آن متقارن باشد یعنی

$$\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$$

ب) $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(-x) + f(x) = 0$

نکات مهم توابع زوج و فرد:

۱- تابع ثابت $f(x) = c$ $(c \neq 0)$ **همواره زوج است.**

۲- تابع صفر هم زوج و هم فرد است.

۳- تابع زوج نسبت به محور عرض‌ها متقارن است.

٤- تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

۵- اگر f تابعی نه زوج و نه فرد باشد اما دامنه آن متقارن باشد می‌توان آن‌را بصورت مجموعی از دو تابع فرد و زوج نوشت.

$$y = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{زوج}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{فرد}}$$

٦- تابع $y = |x-a| + |x-b|$ **زوج است اگر** $a+b=0$

۷- تابع $y = |x-a| - |x-b|$ **فرد است اگر** $a+b=0$

۸- اگر f تابعی فرد و $0 \in D_f$ **آن‌گاه** $f(0) = 0$

۹- اگر f تابعی زوج باشد مشتق مراتب فرد آن فرد است.

۱۰- اگر f **تابعی فرد باشد، مشتق مراتب فرد آن زوج است.**

☺**مثال۱۵۵: تابع** $f(x) = x\sin x + 1$ **چگونه است؟**

۱) فرد است. **۲) زوج است.** **۳) نه فرد است و نه زوج** **٤) هیچکدام**

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۱۵۶: کدامیک از توابع زیر فرد است؟

۱) $h(x)=\cos x$ ۲) $g(x)=x^{2n}$ ۳) $h(x)=\frac{\tan x}{\cot x}$ ٤) $t(x)=\sin x\ \cos x$

۱) $\cos x=\cos(-x)\Rightarrow f(x)=f(-x)\Rightarrow$ زوج

۲) $x^{2n}=(-x)^{2n}\Rightarrow g(x)=g(-x)$ زوج

۳) $\frac{\tan x}{\cot x}=\tan^2 x\Rightarrow \tan^2 x=\tan^2(-x)\Rightarrow$ زوج

۴) $\sin(-x)\cos(-x)=-\sin(x)\cos x\Rightarrow\ t(-x)=-t(x)$ فرد

مثال۱۵۷: تابع $f(x)=\log(\sqrt{x^2+1}-x)$ چگونه است ؟

۱) زوج **۲) فرد** **۳) نه زوج و نه فرد** **٤) هیچکدام**

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۱۵۸: اگر f تابعی فرد با دامنه $\mathbb{R}$ باشد و $g(x)=f(f(-x))$ آن‌گاه $\frac{g(-2)}{g(2)}$ کدام است؟

۱) $f(2)$ **۲)** $-f(2)$ **۳) ۱** **٤) ۱-**

$g(x)=f(f(x))=f(-f(x))=-f(f(x))$

$g(2)=-f(f(2))\ ,\ \ g(-2)=-f(f(-2))=-f(-f(2))=f(f(2))\Rightarrow\frac{g(-2)}{g(2)}=\frac{f(f(2))}{-f(f(2))}=-1$

مثال۱۵۹: تابع $f(x)=\cot\pi(x-[x])$:

۱) زوج است. **۲) فرد است.** **۳) هم زوج و هم فرد است.** **٤) نه زوج و نه فرد است.**

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۱۶۰: f **تابعی است فرد که از نقطه** $A\left|\begin{matrix}5\\3\end{matrix}\right.$ **می‌گذرد.** $f(5-x)=f(x)$ **در آنصورت** $f(10)$ **کدام است؟**

۱) 3 **۲)** -3 **۳)** 5 **۴)** -5

$$f(5-x)=f(x)\xrightarrow{x=10}f(-5)=f(10)\xrightarrow{f\ \text{فرد}}-f(5)=f(10)\Rightarrow f(10)=-3$$

مثال۱۶۱: اگر f **تابعی فرد باشد** $g(x)=f(-f(\tan x))$ **چگونه است؟**

۱) زوج است. **۲) فرد است.** **۳) هم زوج و هم فرد است.** **۴) نه زوج و نه فرد است.**

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۱۶۲: اگر $f(x)$ **یک تابع فرد و مخالف صفر با دامنه** $\mathbb{R}$ **و** $g(x)=2^{f(x)}-\frac{1}{2^{f(x)}}$ **حاصل** $g(1)+g(-1)$ **کدام است؟**

۱) $2g(1)$ **۲)** $2g(-1)$ **۳)** $g(0)$ **۴)** $g(2)$

$$g(-x)=2^{f(-x)}-\frac{1}{2^{f(-x)}}\Rightarrow g(-x)=2^{-f(x)}-\frac{1}{2^{-f(x)}}\Rightarrow g(-x)=\frac{1}{2^{f(x)}}-2^{f(x)}=-g(x)$$

پس با توجه به $g(-x)=-g(x)$

$$g(1)+g(-1)=g(1)+(-g(1))=0$$

می‌دانیم تابع فرد در نقطه به طول $x=0$ یا تعریف نشده است و یا مقدارش در این نقطه برابر صفر می‌باشد. و چون دامنه $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است، پس دامنه تابع $g(x)$ نیز برابر $\mathbb{R}$ بوده و داریم:

$$g(0)=0\Rightarrow g(1)+g(-1)=g(0)$$

مثال۱۶۳: فرض کنید $f(x)=[x]+[-x],\ g(x)=\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{2}x\right]$ **در این صورت کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد تابع** fog **درست است؟**

۱) هم زوج است و هم فرد. **۲) نه زوج است و نه فرد.** **۳) زوج است.** **۴) فرد است.**

$g(x)\notin\mathbb{Z}\Rightarrow f(g(x))=-1$ زوج است.

مثال۱۶۴: اگر $f=\{(0,x),(y,5),(2,z)\}$ **تابعی فرد باشد، آن‌گاه** $x+y+z$ **کدام است؟**

۱) -5 **۲)** 4 **۳)** -7 **۴)** 6

گزینه ۳ صحیح است.

مثال۱۶۵: تابع $f(x)=\begin{cases} ax-۲ & x>۰ \\ b & x=۰ \\ ۳x+c & x<۰ \end{cases}$ **تابعی زوج است. کدام گزینه درست است؟**

۱) $a<۰$ **و** $c<۰$ **و** b **دلخواه**

۲) $a<۰$ **و** $c>۰$ **و** $b=۰$

۳) $a>۰$ **و** $c<۰$ **و** $b=۰$

۴) $a>۰$ **و** $c>۰$ **و** b **دلخواه**

مثال۱۶۶: تابع $f(x)=\left[\frac{a+۳x}{۱+x}\right]+\left[\frac{۲x}{۱-x}\right]$ **در** $\mathbb{R}-\{-۱,۱\}$ **زوج است.** a **کدام‌یک از مقادیر می‌تواند باشد؟**

۱) $a=۵$ **۲)** $a=۶$ **۳)** $a=\frac{۳}{۲}$ **۴)** $a=\frac{۲}{۳}$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال۱۶۷: اگر $f(x)=\frac{x^۳+۳x^۲+۲x-۵}{x^۲-۱}$ **و** $f(x)=(g+h)(x)$ **و** g **تابعی زوج و** h **تابعی فرد باشد،** $h(-۲)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۷}{۳}$ **۲)** $-\frac{۷}{۳}$ **۳)** ۴ **۴)** -۴

$$f(x)=\frac{۳x^۲-۵}{x^۲-۱}+\frac{x^۳+۲x}{x^۲-۱}\Rightarrow f(x)=g(x)+h(x)\xrightarrow{\text{فرد } h(x)} h(x)=\frac{x^۳+۲x}{x^۲-۱}\Rightarrow h(-۲)=-۴$$

مثال۱۶۸: کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=\begin{cases} ۳ & x\in Q \\ \frac{۱}{۳} & x\notin Q \end{cases}$ **درست است؟**

۱) فرد است. **۲) زوج است.** **۳) هم فرد و هم زوج است.** **۴) نه فرد و نه زوج است.**

گزینه ۲ صحیح است.

☹مثال۱۶۹: کدام همواره درست است؟

۱) جمع دو تابع فرد که $D_f \cap D_g \neq \phi$ ممکن است فرد نباشد.

۲) اگر $f+g$ و $f-g$ دو تابع فرد باشند، حتماً f و g نیز فرد هستند.

۳) اگر $f+g$ و $f-g$ دو تابع زوج باشند، آن‌گاه f و g در $D_f \cap D_g$ به شرط غیر تهی زوج است.

٤) اگر $f.g$ و $\frac{1}{g}$ هر دو زوج باشند، آن‌گاه f زوج است.

$f = \{(-1,1),(-2,3),(2,-3),(1,-1),(3,1)\}$

$g = \{(-1,4),(-2,3),(2,-3),(1,-4),(-3,-1)\}$

f و g هیچ‌کدام فرد نیستند. در صورتی که: $f+g$ و $f-g$ هر دو فرد هستند. اما اگر تابع‌های f و g در $D_f \cap D_g$ در نظر گرفته شوند فرد هستند. در مورد توابع زوج نیز چنین است.

$f+g = \{(-1,5),(1,-5),(-2,6),(2,-6)\}$

$f-g = \{(-1,-3),(1,3),(-2,0),(2,0)\}$

$f(-x) = \frac{1}{2}(f+g)(-x) + \frac{1}{2}(f-g)(-x) = \frac{1}{2}(f+g)(x) + \frac{1}{2}(f-g)(x) = f(x), x \in D_f \cap D_g$

به شرطی که $x \in D_f \cap D_g$ باشد، روابط فوق درست‌اند.

☹مثال۱۷۰: اگر تابع $f = \{(2m-1, a^2 + \frac{1}{2}), (a+m, m^2 - 3m + 2)\}$ تابعی زوج و یک به یک باشد، $\frac{m}{a}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -2 ٤) -1

تابع ناتهی f فقط در صورتی می‌تواند هم زوج و هم یک به یک باشد که $D_f = \{0\}$ شود، یعنی f فقط شامل نقاطی روی محور yها باشد.

$2m - 1 = a + m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}, a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m}{a} = -1$

☹مثال۱۷۱: تابع $\begin{cases} (2,+\infty) \to R \\ f(x) = \log(3x-6) \end{cases}$ چگونه است؟

۱) یک به یک است ولی زوج نیست.
۲) یک به یک است و فرد
۳) یک به یک است و زوج
٤) نه یک به یک است و نه فرد و نه زوج

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \log 3x_1 - 6 = \log 3x_2 - 6 \Rightarrow 3x_1 - 6 = 3x_2 - 6 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ یک به یک است.

اما f نه فرد و نه زوج است چرا که شرط اول تابع زوج و فرد را دارا نمی‌باشد.

برقرار نیست. $(\forall x \in D_f \to -x \in D_f)$

☹😐مثال۱۷۲: تابع $\begin{cases} R \to R \\ f(x) = \frac{x}{|x|} \end{cases}$ چگونه است؟

۱) یک به یک و زوج است. ۲) یک به یک و فرد است. ۳) یک به یک نیست و فرد است. ٤) یک به یک نیست و زوج است.

گزینه ۳ صحیح است.

☹مثال۱۷۳:تابع $f(x)=a^{\sin x-۲}\ (a>۰)$ **چگونه است؟**

۱) یک به یک است و فرد ۲) یک به یک است و زوج ۳) یک به یک نیست و فرد است. ٤) نه یک به یک و نه زوج و نه فرد است.

$$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow a^{\sin x_۱-۲}=a^{\sin x_۲-۲}\Rightarrow \sin x_۱-۲=\sin x_۲-۲\Rightarrow \sin x_۱=\sin x_۲\Rightarrow x_۱\neq x_۲$$

همیشه برقرار نیست. پس یک به یک نمی‌باشد.

نه فرد است و نه زوج است. $f(-x)=a^{\sin(-x)-۲}=a^{-\sin x-۲}$

☺مثال۱۷۴: تابع $\begin{cases} R:\{۰\}\to[-۱,۱] \\ f(x)=\dfrac{x}{|x|}\end{cases}$ **چگونه است؟**

۱) پوشاست و زوج است. ۲) پوشاست و فرد است. ۳) پوشا نیست و فرد است. ٤) پوشا نیست و زوج است.

گزینه ۳ صحیح است.