و معادله مورد نظر عبارت است از:

$$f(g^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{x-1}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{3(x-1)}{2} - 1 = 0 \xrightarrow{\times 4} (x-1)^2 - 6(x-1) - 4 = 0$$

این روش وقتی مناسب است که $g(x)$ خطی یا کسری باشد. در حالت‌های دیگر باید کمی مسئله را دستکاری کنیم:

مثال ۱۲) در معادله‌ی $x^2 - x - 5 = 0$ ریشه‌ها x_1 و x_2 هستند. معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $x_1^3 + x_1 + 1$ و $x_2^3 + x_2 + 1$ باشند.

پاسخ: در اینجا $g(x) = x^3 + x + 1$ درجه‌ی ۱ نیست. لذا باید کمی به مسئله کمک کنیم:

$$x^2 - x - 5 = 0 \rightarrow x^2 = x + 5 \rightarrow x^3 = x^2 + 5x$$

$$\rightarrow x^3 = x + 5 + 5x = 6x + 5$$

بنابراین:

$$g(x) = (6x + 5) + (x + 1) = 7x + 6$$

یعنی:

$$g^{-1}(x) = \frac{x-6}{7}$$

و پس:

$$f(g^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-6}{7}\right) = \left(\frac{x-6}{7}\right)^2 - \left(\frac{x-6}{7}\right) - 5 = 0$$

$$\xrightarrow{\times 49} (x-6)^2 - 7(x-6) - 49 \times 5 = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 12x + 36 - 7x + 42 - 245 = x^2 - 19x - 167 = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{1-\tg x}{1+\tg x} = \tg 3x \longrightarrow -\tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \tg 3x$$

$$\rightarrow \tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \tg 3x \longrightarrow \frac{\pi}{4} - x = 3x + k\pi$$

$$\longrightarrow \frac{\pi}{4} - k\pi = 4x \longrightarrow \frac{\pi}{16} - \frac{k\pi}{4} = x$$

نکته: می‌توانید، وطبعاً طراح نیز می‌تواند، به جای $k\pi$ بنویسید $-k\pi$. زیرا k عددهای صحیح را طی می‌کند.

$$x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$$

مثال ۳) معادله $\tg x \tg 3x = -1$ را حل کنید. (دشوار - دشوارتر)

پاسخ: $\tg x \tg 3x = -1 \longrightarrow \tg 3x = \frac{-1}{\tg x} = -\ctg x$

$$\rightarrow \tg 3x = \ctg(-x) = \tg\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \tg\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + x + k\pi \longrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

نکته: تبدیل $x \longrightarrow \frac{\pi}{2} - x$ می‌تواند اسم تابع مثلثاتی را عوض کند.

مثال ۴) معادله‌ی $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \sqrt{3}$ را حل کنید.

پاسخ: صورت و مخرج را همزمان بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\tg x + 1}{\tg x - 1} = \sqrt{3} \longrightarrow -\tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \tg\left(\frac{\pi}{3}\right) \longrightarrow$$

$$x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + k\pi \longrightarrow x = -\frac{7\pi}{12} + k\pi$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۵) معادله‌ی $\sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos 2x(\cos x - \sin x)$ را حل کنید. (تجربی ـ ۹۴)

پاسخ:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \rightarrow \tan 2x = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$$

$$\rightarrow \tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} - x + k\pi$$

$$\rightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$$

مثال ۶) معادله‌ی $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$ را حل کنید (تجربی ۹۴)

پاسخ: داریم:

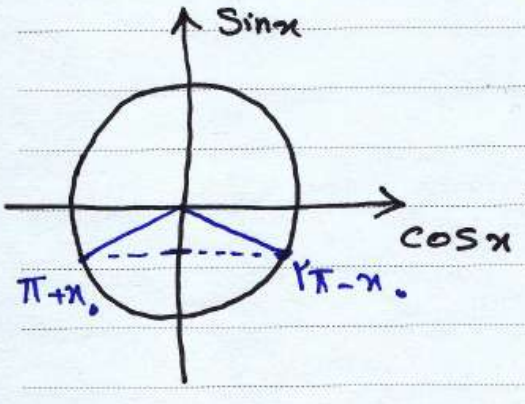
$$2\cos^2 x + \sin 2x = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$\rightarrow \sin 2x = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$$

$$\rightarrow \sin 2x = -\cos 2x \xrightarrow{\div \cos 2x} \tan 2x = -1$$

$$\rightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$

مثال ۷) مجموع جواب‌های معادله‌ی $(2\sin x + 1)(2\cos x - 1) = 0$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند است. (دشوار ـ دشوارتر)

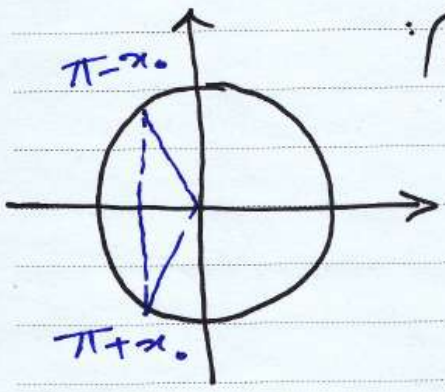


در اینگونه مسائل پیشنهاد ما این است که دایره را رسم کنید:

$$2\sin x + 1 = 0 \rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$$

مجموع جواب‌های روی دایره: $2\pi - x_0 + \pi + x_0 = 3\pi$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



برای $3\cos x+1=0 \longrightarrow \cos x=-\frac{1}{3}$ نیز داریم:

مجموع: $\pi-x_0+\pi+x_0=2\pi$

و بنابراین مجموع همه جوابها: $3\pi+2\pi=5\pi$

مثال ۸) معادله‌ی $tg^2x-3=0$ را حل کنید (کتاب درسی)

پاسخ: برای حل این معادله داریم:

$$tg^2x=3 \longrightarrow |tgx|=\sqrt{3} \longrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$$

مثال ۹) معادله‌ی $\frac{tg2x+tgx}{1-tg2x\,tgx}+tgx=\sqrt{3}$ را حل کنید.

پاسخ: از اتحاد مربوط به تابع tg داریم:

$$\frac{tg2x+tgx}{1-tg2x\,tgx}=tg(2x+x)=tg3x$$

بنابراین مسئله تبدیل می‌شود به:

$$\frac{tg3x+tgx}{1-tg3x\,tgx} \xrightarrow{\text{تجدد اتحاد } tg} tg(3x+x)=tg4x$$

بنابراین:

$$tg4x=\sqrt{3}=tg\frac{\pi}{3} \longrightarrow 4x=\frac{\pi}{3}+k\pi$$

$$\longrightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{4}$$

بهترین آرزوها
امیدوار و پرتلاش باشید.