

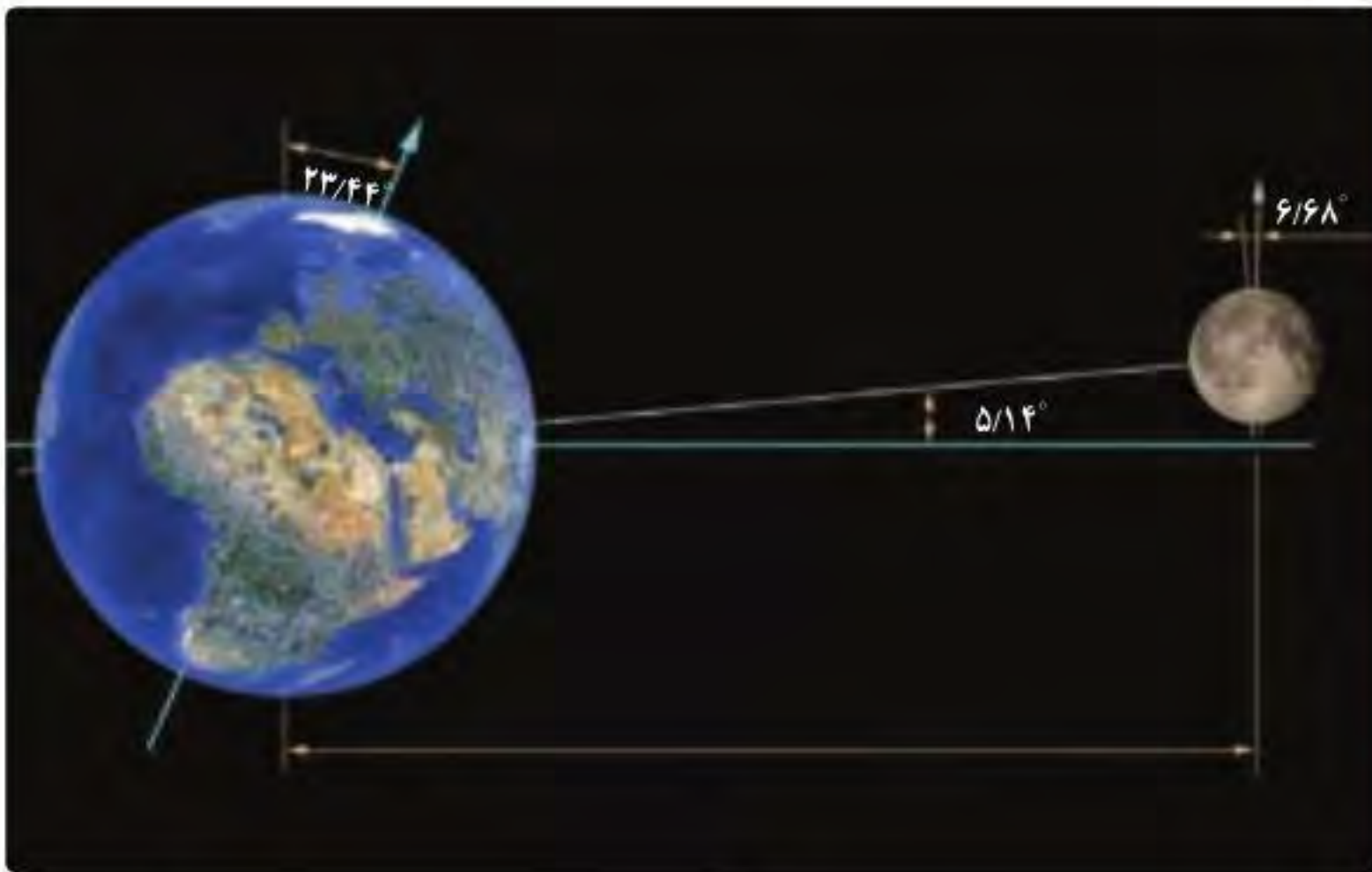
تهیه کنندگان:

جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

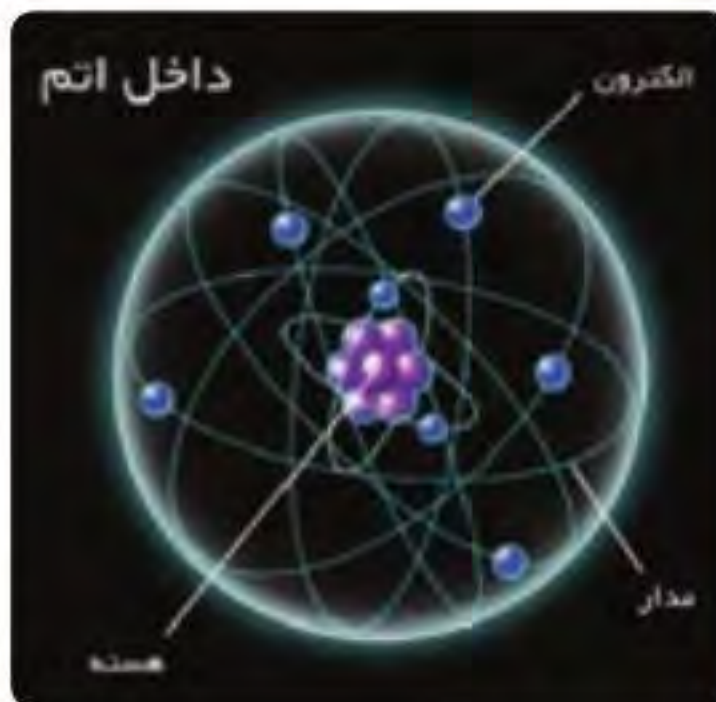
## مشکات

الشمس والقمر بحسبان (رحمان: ۵)

خورشید و ماه برابر حساب (منظمی در چرخش و گردش) هستند.



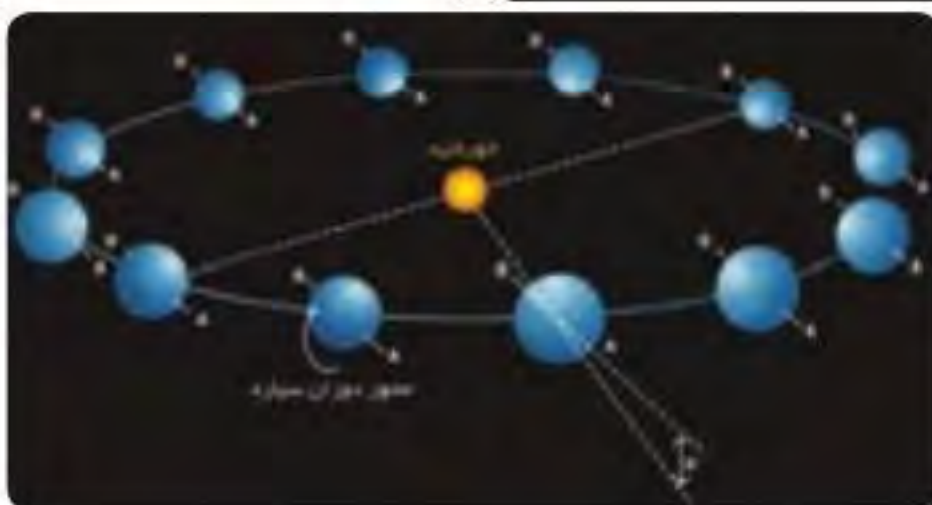
زمین هم به دور خودش و هم به دور خورشید می چرخد. مسیر حرکت زمین به دور خورشید بیضی شکل است که حاصل آن پیدایش فصل های مختلف است. روز و شب نیز حاصل چرخش زمین به دور خودش است. این چرخش را حرکت وضعی زمین می نامیم که در آن چرخش زمین به سمت شرق است. ستاره قطبی، ستاره ای است که موقعیت محلش نسبت به ناظر ساکن روی زمین تغییر نمی کند. اگر از سمت ستاره قطبی به زمین نگاه کنیم، زمین خلاف جهت عقربه های ساعت به دور خود، دوران می کند.



درس اول نسبت های مثلثاتی

درس دوم دایره مثلثاتی

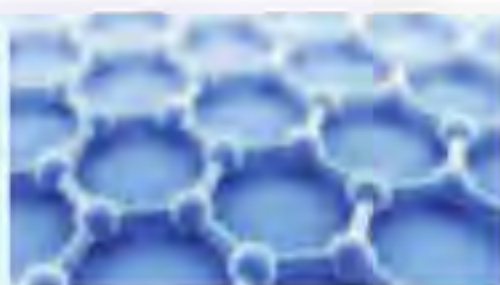
درس سوم روابط بین نسبت های مثلثاتی







برای اینکه اتومبیل‌ها در پیچ جاده‌ها بتوانند بدون خطر انحراف، حرکت کنند، در جاده شیب عرضی ایجاد می‌کنند، یعنی آن را طوری می‌سازند که قسمت بیرونی جاده نسبت به قسمت درونی، مرتفع‌تر باشد.



در صفحات گرافن، هر اتم کربن با سه اتم کربن دیگر پیوند دارد که زوایای بین این پیوندها  $120^\circ$  درجه است. در آینده‌ای نه‌چندان دور، بهترین میکروفن‌های جهان با استفاده از گرافن ساخته می‌شوند. این میکروفن‌ها، قابلیت ردیابی امواج صوتی فراتر از دامنه شدت شنوایی انسان را دارند.

## درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

مثلثات شاخه‌ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می‌پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه‌گیری فاصله‌ها به صورت غیرمستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه‌برداری، دریانوردی، نجوم و غیره کاربرد دارد. به عنوان مثال، فرض کنید یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است.



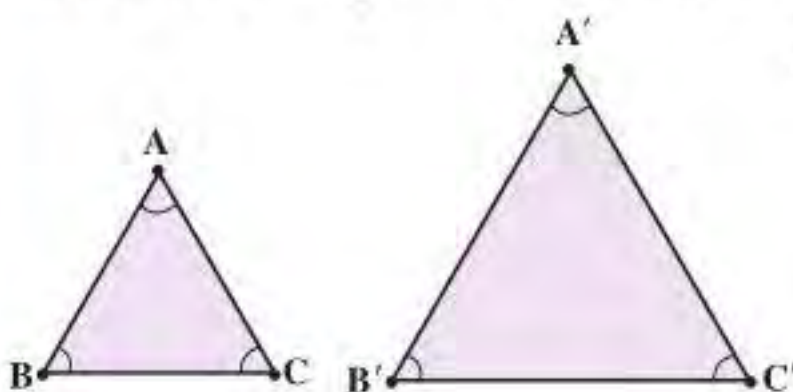
اگر زاویه هواپیما با افق  $13^\circ$  باشد، می‌خواهیم محل دقیق فرود هواپیما را بدانیم. این مسئله و مسائلی نظیر این با استفاده از روابط مثلثاتی حل می‌شوند.

برای معرفی مفهوم مثلثات، به مفهوم تشابه نیاز داریم. در پایه نهم با این مفهوم آشنا شدید و دیدید که دو مثلث با هم متشابه‌اند، هرگاه زوایای نظیر در آنها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشند. یعنی اگر  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ، آنگاه

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

$$\hat{A} = \hat{A'}, \hat{C} = \hat{C'}, \hat{B} = \hat{B'}$$

در هندسه ثابت می‌شود:

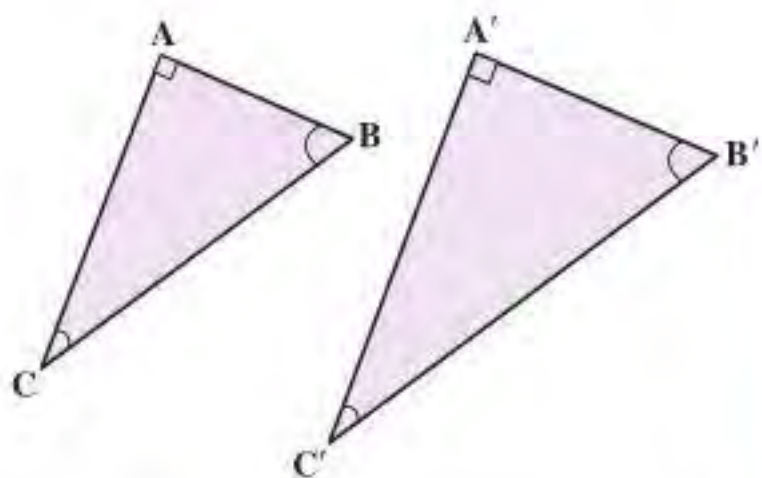


هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث، متشابه‌اند.

به عنوان یک نتیجه از مطلب بالا می‌توان دید:

اگر  $\triangle ABC$  و  $\triangle A'B'C'$  در شکل مقابل قائم الزاویه باشند و داشته باشیم  $\hat{C} = \hat{C'}$ ، آنگاه

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

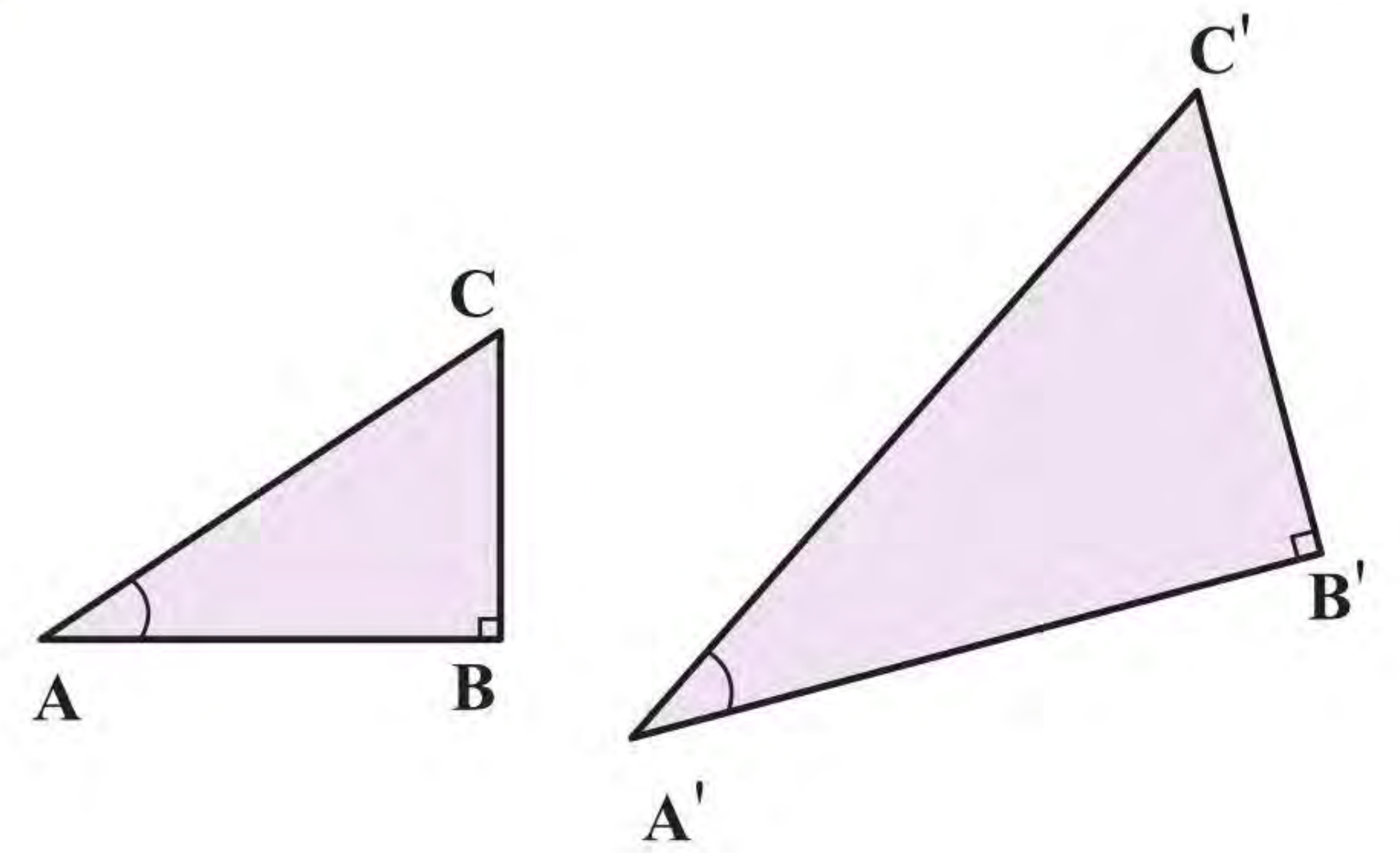




کار در کلاس

۱ در مثلث‌های قائم‌الزاویه  $ABC$  و  $A'B'C'$ ،  $\hat{A} = \hat{A}'$ . جاهای خالی را کامل کنید.

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$



۲ از تساوی  $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$ ، می‌توان نتیجه گرفت  $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$  (چرا؟). با توجه به این نکته، جاهای خالی را کامل کنید:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ و } \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

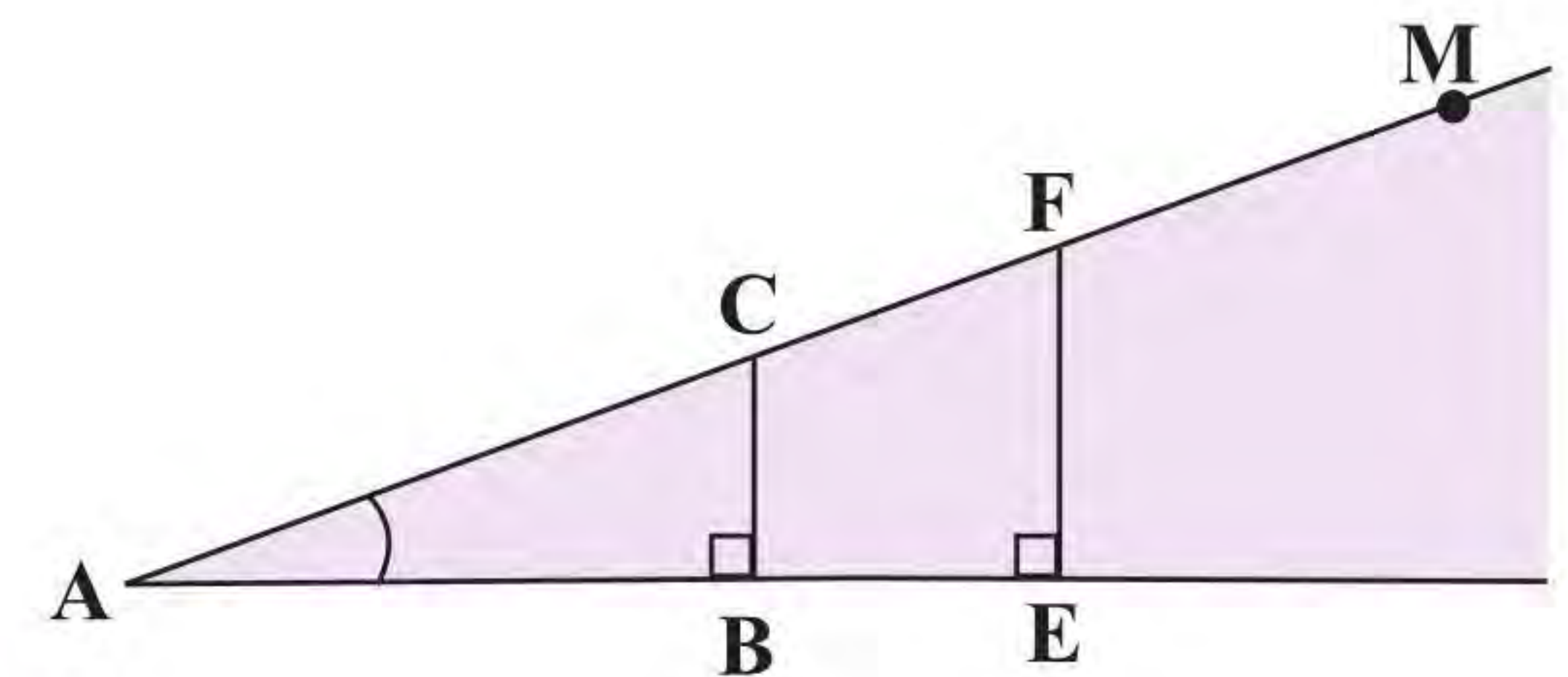
نتیجه: اگر زاویه  $A$  از مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  با زاویه  $A'$  از مثلث قائم‌الزاویه  $A'B'C'$  (مطابق شکل بالا) برابر باشد، داریم:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} \text{ و } \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ و } \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

فعالیت

۱ در شکل سمت راست، درستی تساوی  $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$  را بررسی کنید.

$$\triangle ACB \sim \triangle AFE \Rightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF} \xrightarrow{\text{خواص تناسب}} \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$$

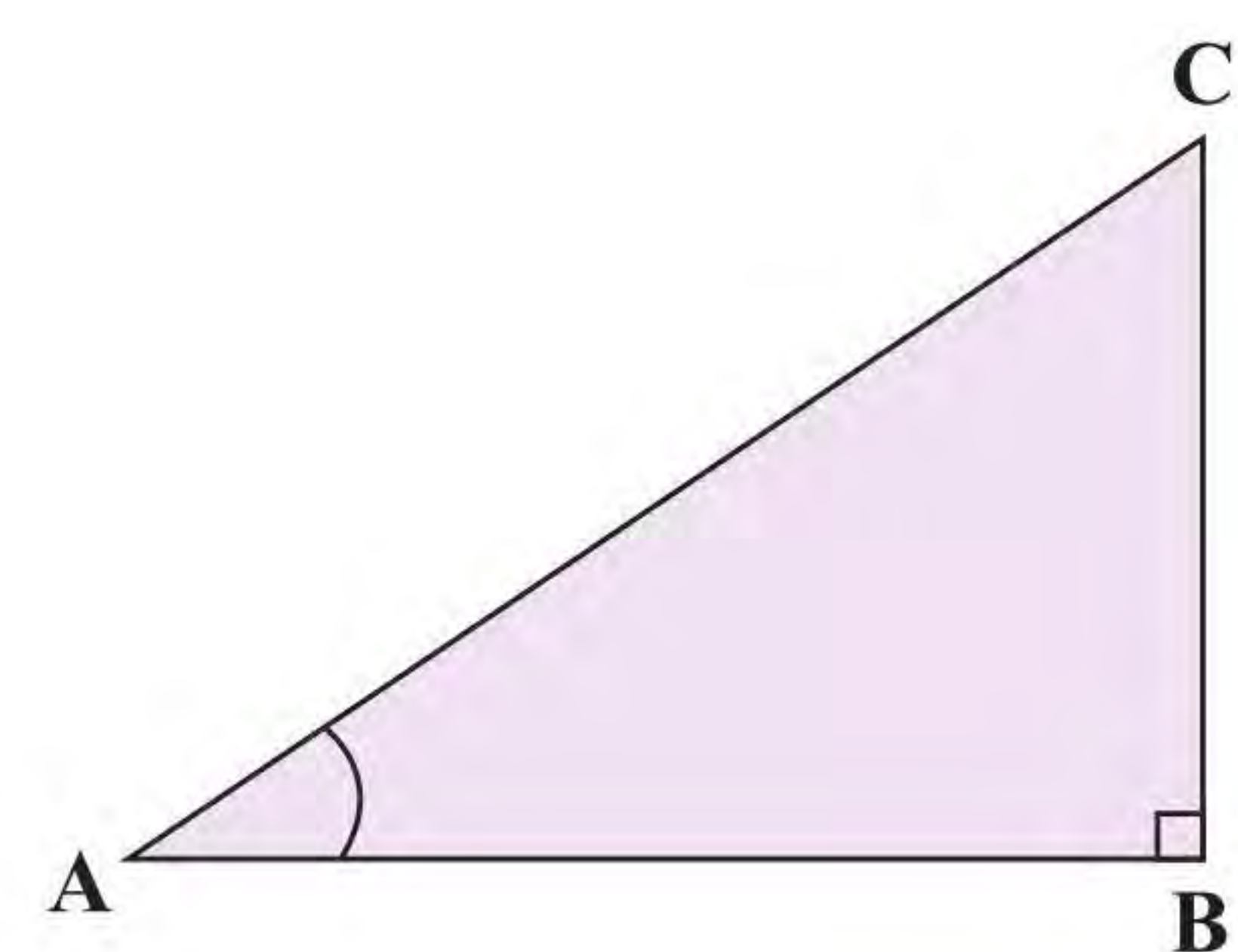


۲ نقطه دیگری مثل  $M$  را در امتداد  $AC$  در نظر بگیرید و از آن نقطه، عمودی بر ضلع دیگر زاویه  $A$  رسم کنید و پای عمود را  $N$  بنامید. اکنون جاهای خالی را کامل کنید:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{AN} = \frac{EF}{AE}$$

همان‌طور که در «کار در کلاس» بالا دیدیم، در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  برای زاویه معین و حاده  $A$ ، نسبت طول ضلع مقابل زاویه  $A$ ، به طول ضلع مجاور آن همواره مقداری ثابت است. این نسبت را تانژانت زاویه  $A$  می‌نامیم و آن را با  $\tan A$  نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ، داریم:

$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A} = \frac{BC}{AB}$$

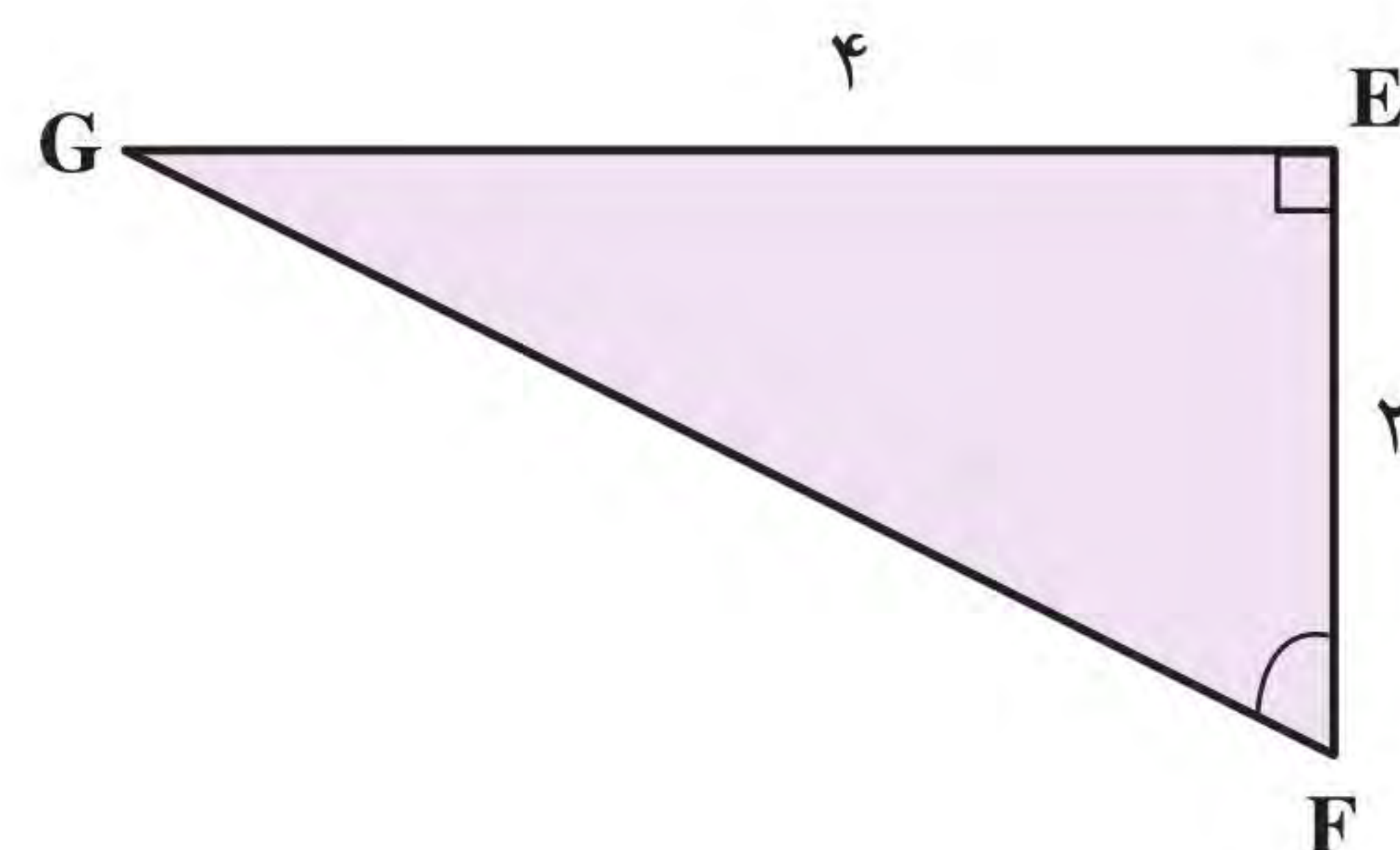
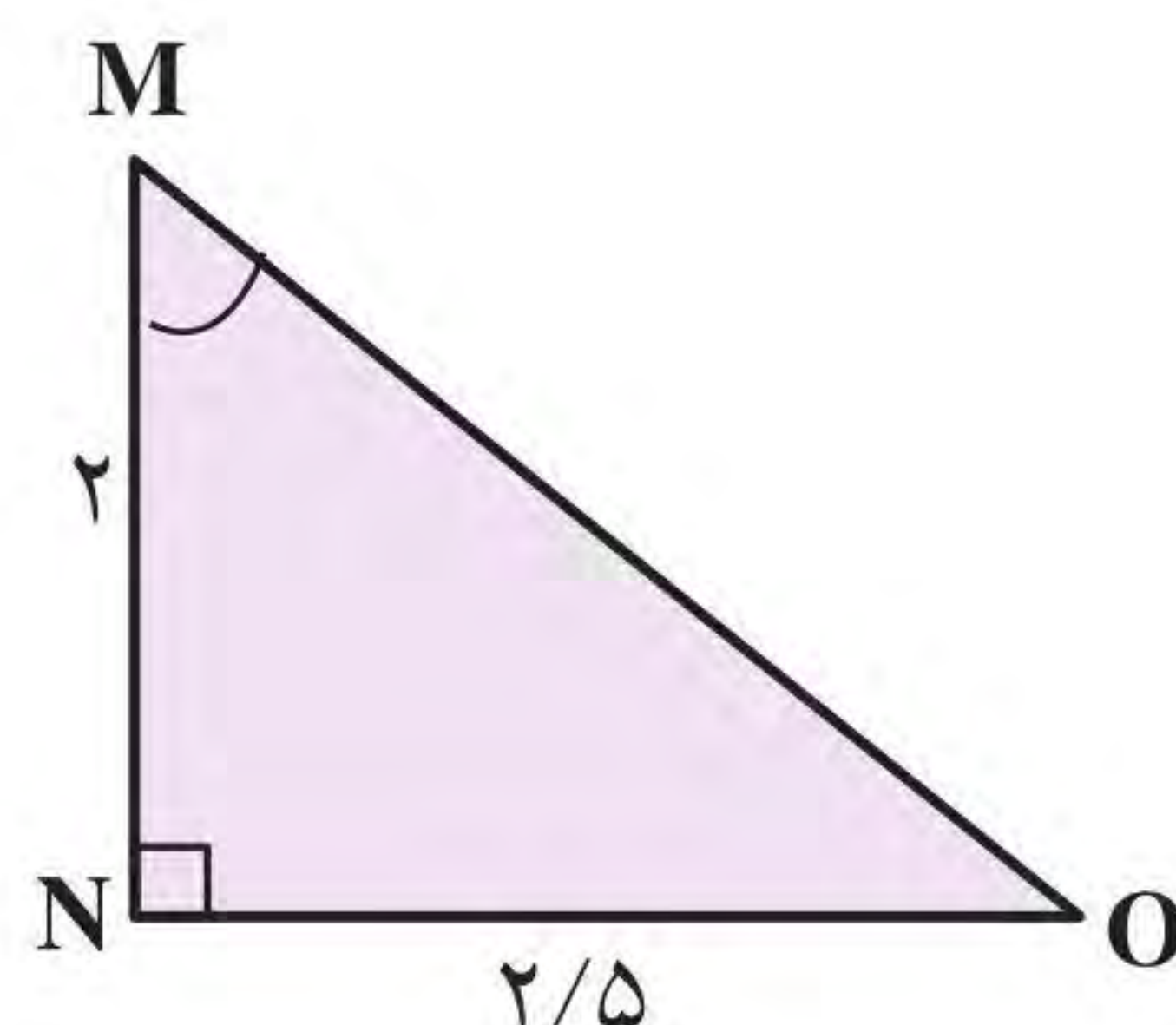
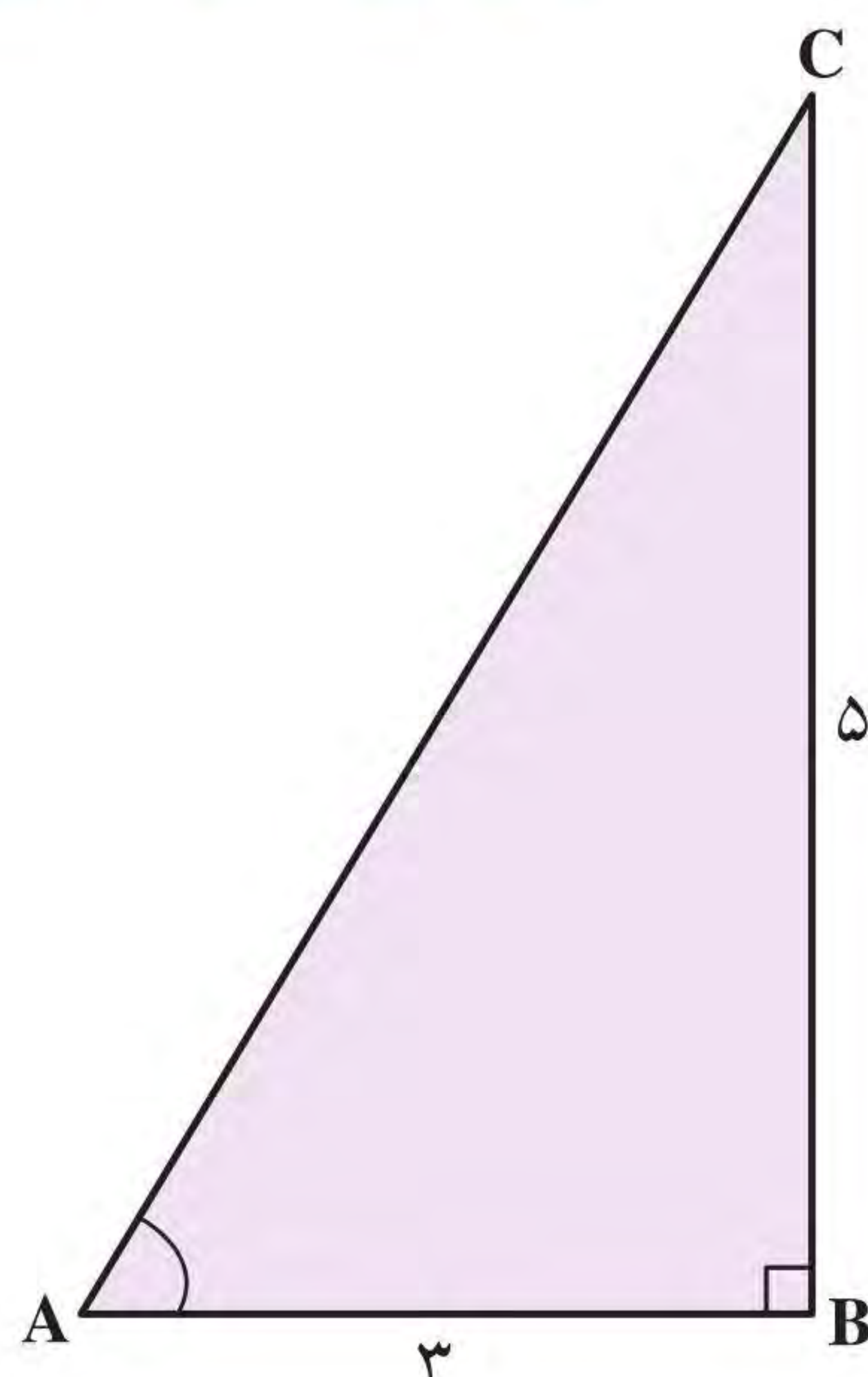


عکس تانژانت زاویه  $A$  را کتانژانت می‌نامیم و آن را با  $\cot A$  نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  داریم:

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A} = \frac{AB}{BC}$$



۱ در هر یک از شکل های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.



$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{3}$$

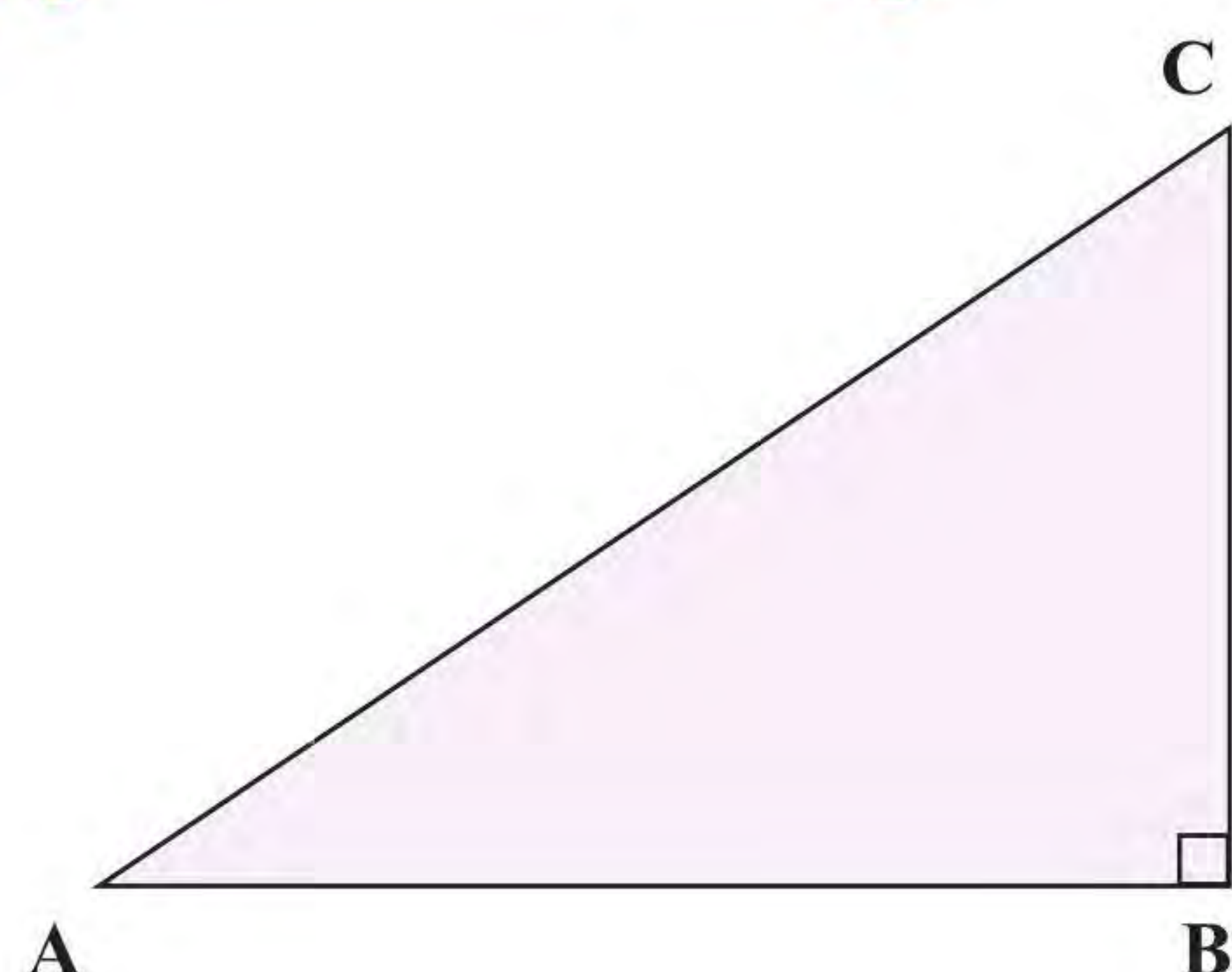
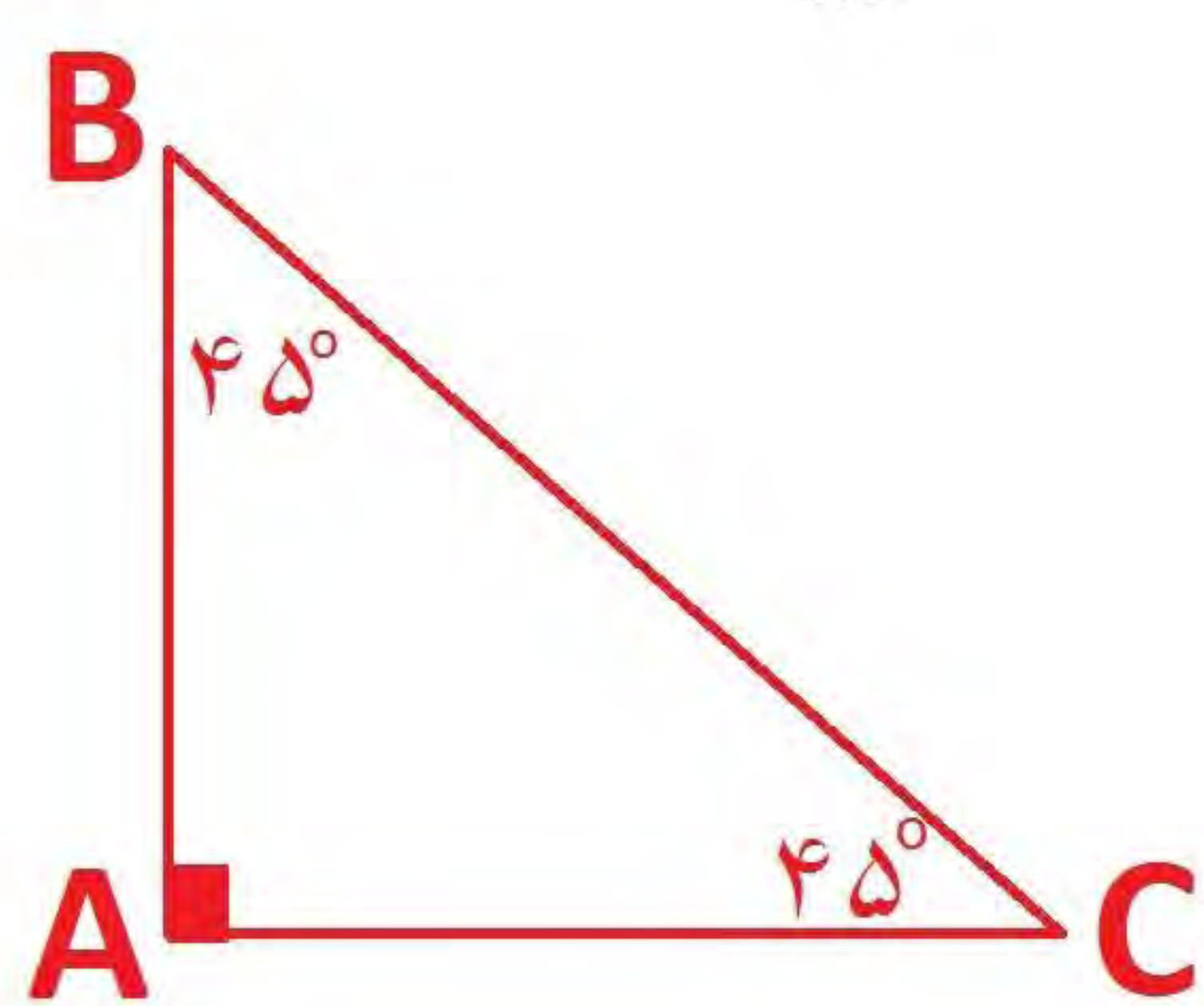
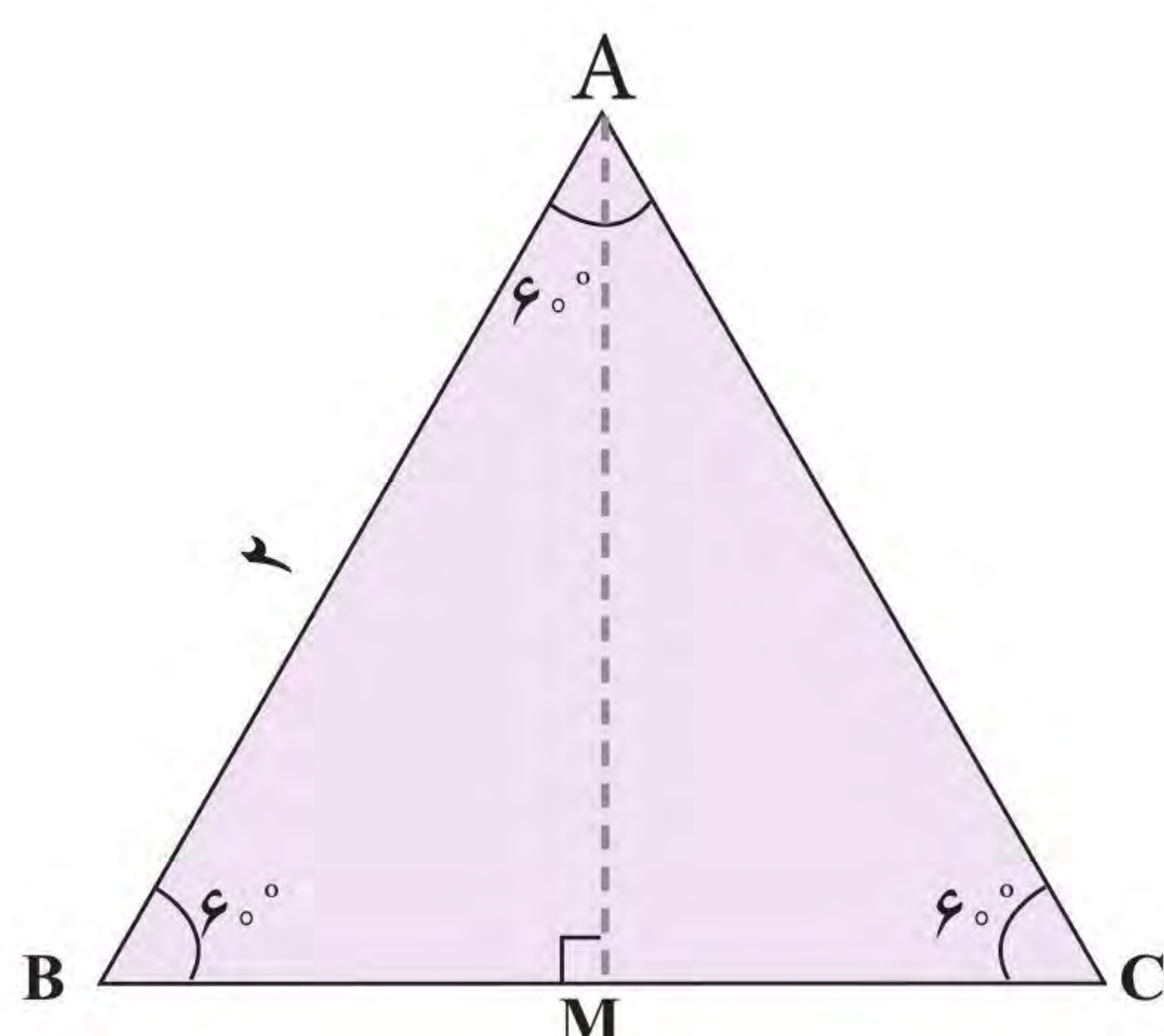
$$\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{2}{2/5}$$

$$\tan F = \frac{GE}{EF} = \frac{4}{2}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{2/5}{2}$$

$$\cot F = \frac{EF}{GE} = \frac{2}{4}$$



۲ مثلث متساوی الاضلاع ABC با اضلاعی به طول ۲ واحد را در نظر بگیرید.

الف) محل برخورد نیمساز زاویه A با پاره خط BC را M بنامید. با توجه به خواص مثلث متساوی الساقین، AM **میانۀ** ضلع BC است. بنابراین

$$BM = MC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB = 1$$

ب) با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول AM و حاصل کسره های زیر را به دست آورید.

$$\tan 30^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tan 60^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{3}}{1} \quad 1^2 + AM^2 = 2^2 \Rightarrow AM = \sqrt{3}$$

پ) با استفاده از یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین، تانژانت و کتانژانت زاویه ۴۵ را پیدا کنید.

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{AC} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{AC}{AB} = 1$$

در هر مثلث قائم الزاویه ABC، نسبت طول ضلع مقابل زاویه حاده A به طول وتر، همواره مقداری ثابت است که آن را سینوس زاویه A می نامیم و با  $\sin A$  نشان می دهیم. به عبارت دیگر

$$\sin A = \frac{BC}{AC}$$

همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویه حاده A به طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را

کسینوس زاویه A می نامیم و آن را با  $\cos A$  نشان می دهیم. به عبارت دیگر  $\cos A = \frac{AB}{AC}$ .

به سادگی می توان دید در مثلث قائم الزاویه ABC،  $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}$  و از

این رو  $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$  به طور مشابه، می توان دید  $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$ .

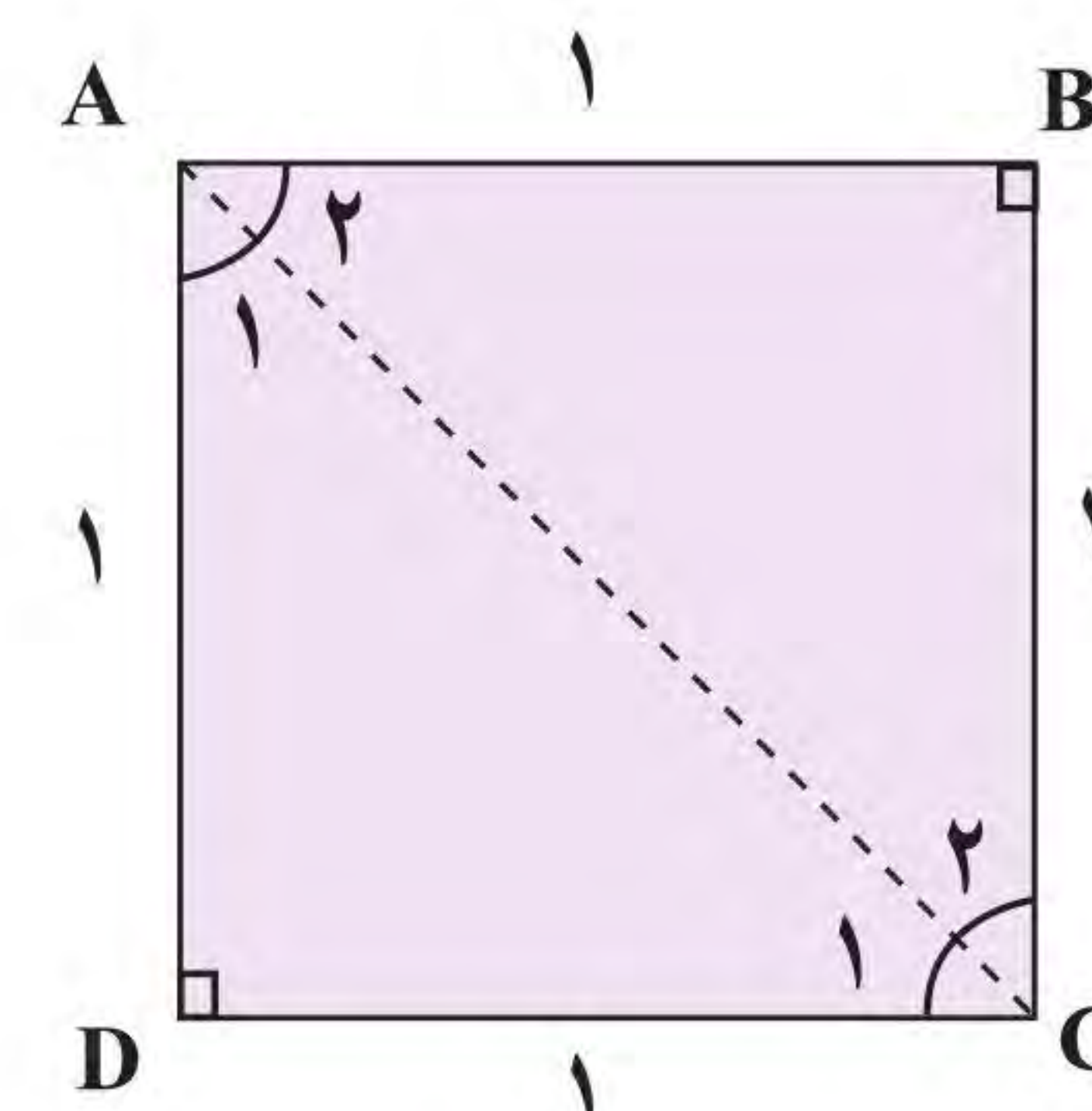


در یک مثلث قائم الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت های مثلثاتی می نامیم.

### مثال

خانم جلالی از دانش آموزان خواست تا نسبت های مثلثاتی زاویه  $45^\circ$  را حساب کنند. او ابتدا یک مربع با اضلاعی به طول ۱ واحد رسم کرد و از دانش آموزان خواست تا قطر AC را رسم کرده و سپس طول آن را حساب کنند.

**فریبا:** با توجه به اینکه مثلث ADC قائم الزاویه است، داریم  $(AD)^2 + (DC)^2 = (AC)^2$ . در نتیجه  $(AC)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$  و از این رو  $(AC)^2 = 2$ . چون اندازه قطر همواره عددی مثبت است، پس  $AC = \sqrt{2}$ .



**معلم:** با توجه به اینکه مثلث ADC متساوی الساقین است، از این رو  $\hat{A}_1 = \hat{C}_1 = 45^\circ$ .

**مبینا:** طبق تعریف سینوس،  $\sin A_1 = \sin 45^\circ = \frac{DC}{\text{وتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**سبا:** من هم می توانم با توجه به روابط بالا کسینوس  $45^\circ$  را پیدا کنم.

$$\cos A_1 = \cos 45^\circ = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**مریم:** اکنون در مثلث قائم الزاویه ADC، طبق تعریف داریم

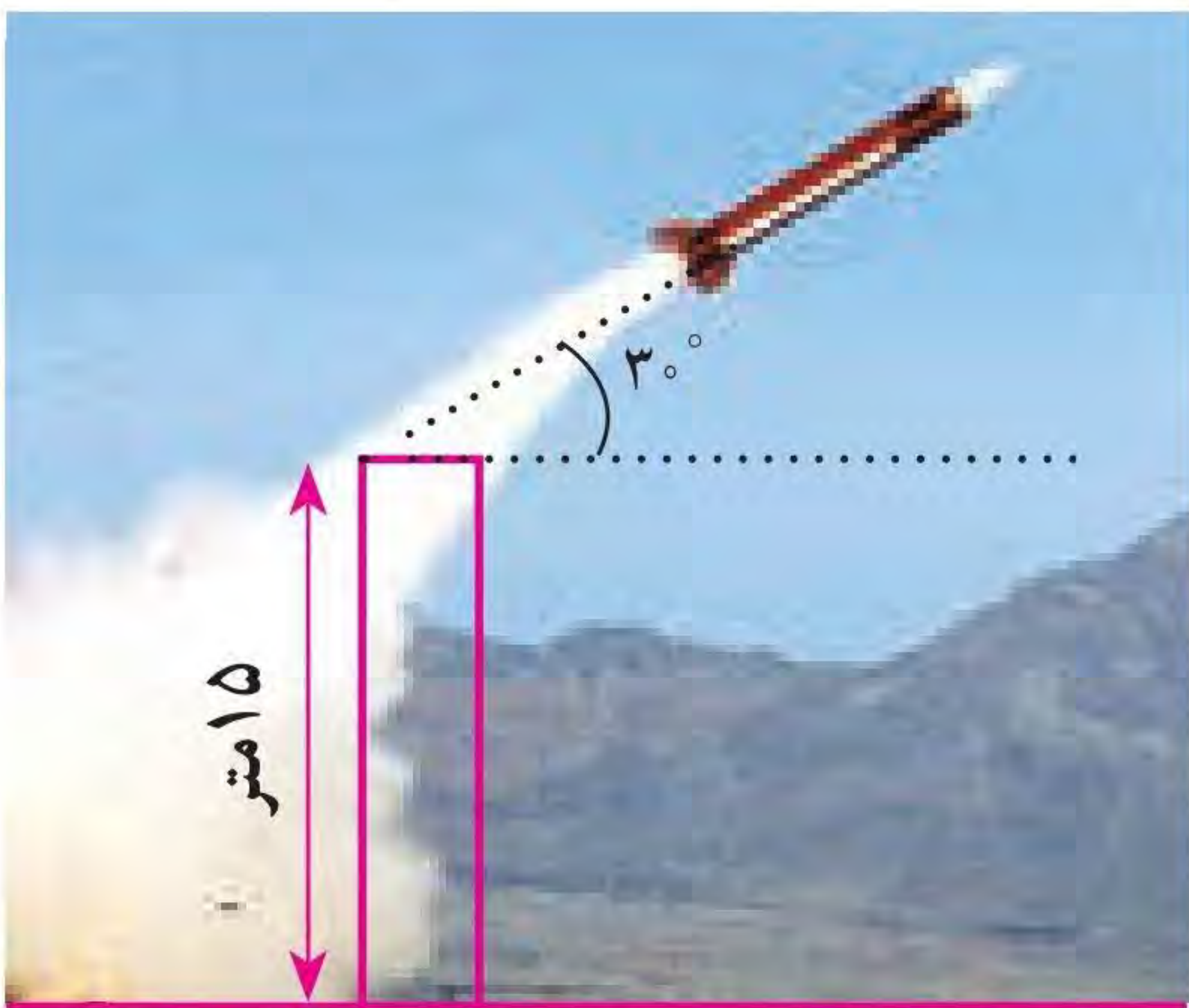
$$\tan A_1 = \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1 \text{ و } \cot A_1 = \cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1.$$

### کار در کلاس

به کمک شکل فعالیت قبل، با پیدا کردن نسبت های مثلثاتی زاویه های  $30^\circ$  و  $60^\circ$ ، جدول زیر را کامل کنید (در صورت لزوم، کسر ها را گویا کنید).

مقدار	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot A$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$





یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه  $3^\circ$  پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟  
**حل:** ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می‌سازیم. با توجه به شکل زیر، به سادگی می‌توان دید، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با:

$$BC + MC = BC + \dots 15 \dots$$

بنابراین کافی است طول BC را پیدا کنیم. می‌دانیم  $\sin 3^\circ = \frac{1}{2}$ . پس در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

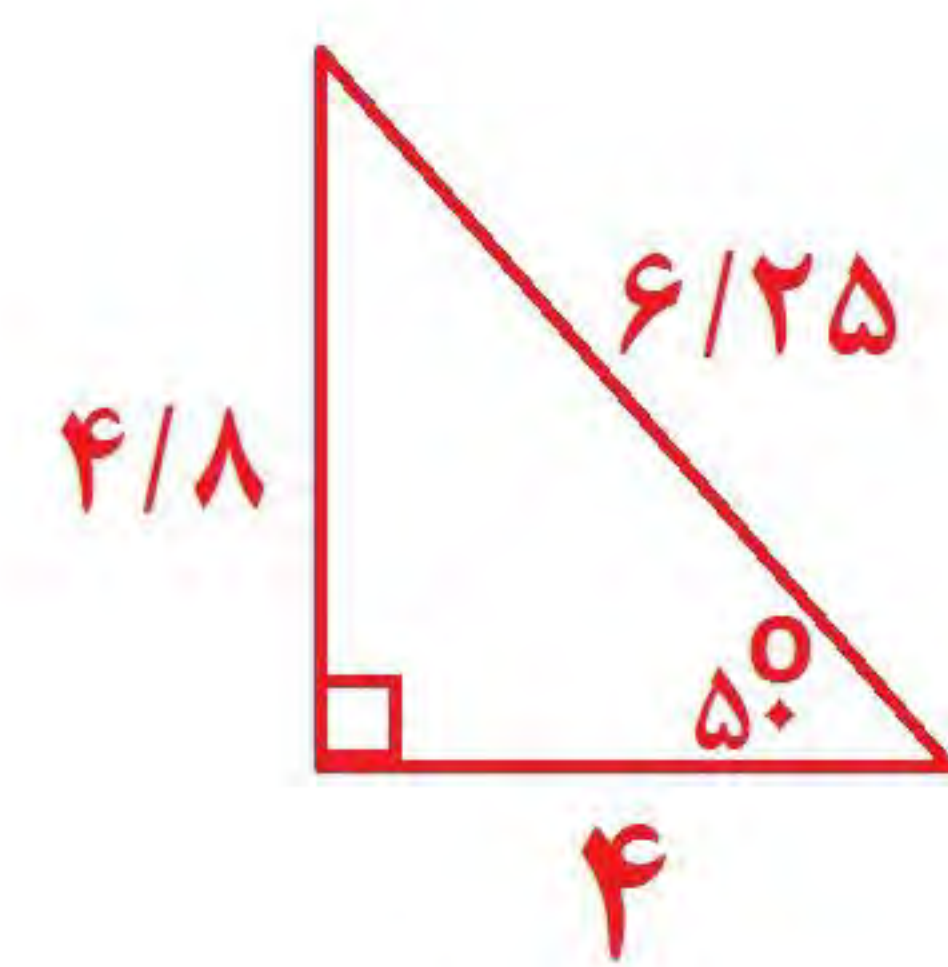
$$\sin 3^\circ = \frac{1}{2} = \frac{BC}{2000} \Rightarrow BC = 1000$$

و از این رو

$$\text{ارتفاع موشک} = 1000 + 15 = 1015$$

## فعالیت

۱ یک زاویه  $5^\circ$  رسم کنید. با تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری طول‌های موردنظر با یک خط‌کش مدرج، نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $5^\circ$  را به صورت تقریبی حساب کنید. سپس با ماشین حساب، مقادیر واقعی را به دست آورید و با مقادیر قبل مقایسه کنید.



$$\sin 5^\circ = \frac{4/8}{6/25} = 0.768$$

۲ می‌خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می‌دانیم:

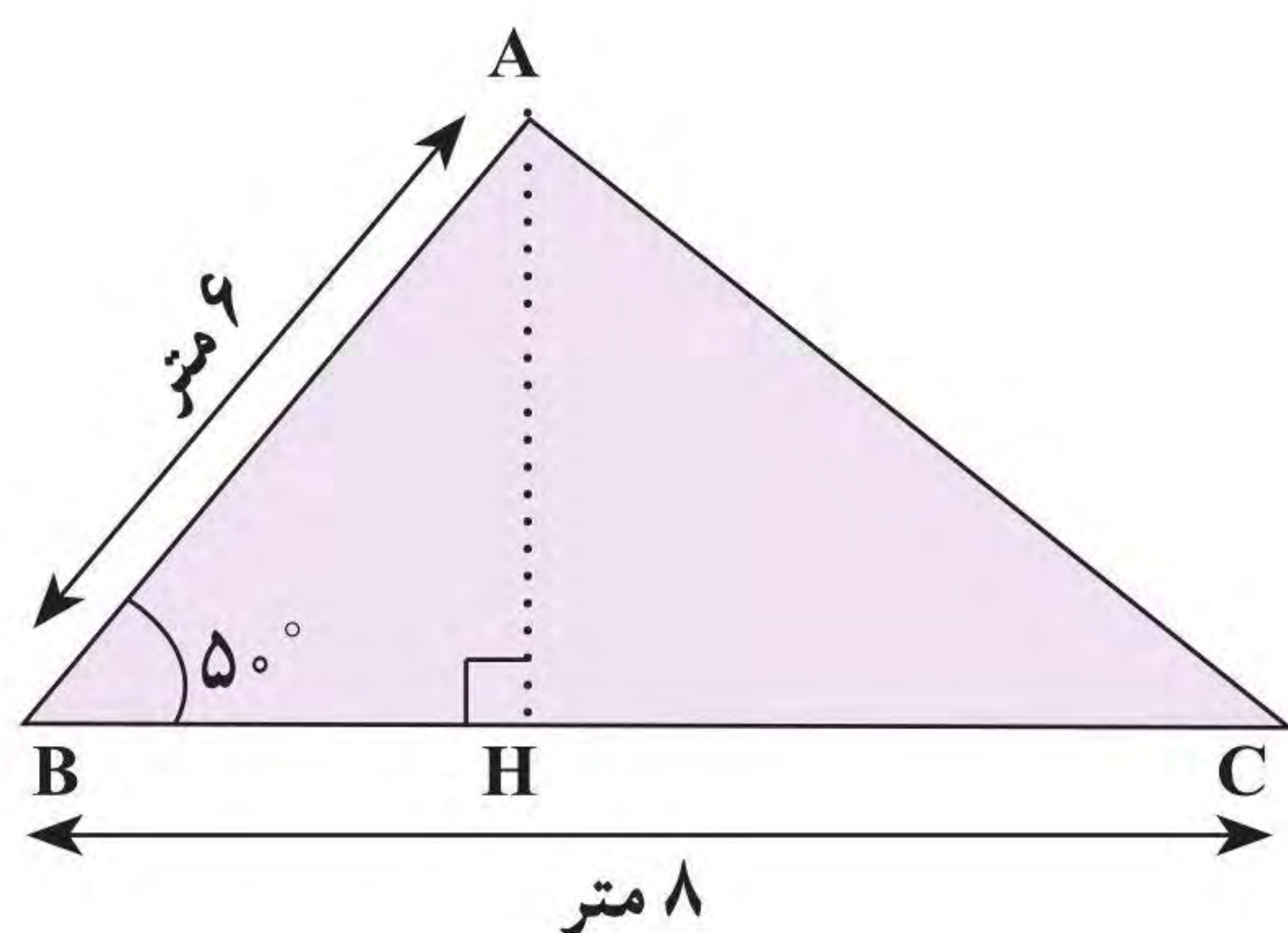
$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{1}{2} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

(الف) با توجه به اینکه  $\sin 5^\circ \approx 0.76$ ، داریم:

$$\sin 5^\circ = \frac{AH}{\text{وتر}} = \frac{AH}{6} \Rightarrow AH \approx 0.76 \times 6 = 4.56$$

(ب) با توجه به قسمت (الف) داریم:

$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC \approx \frac{1}{2} \times 4.56 \times 8 = 18.24$$





کار در کلاس

۱ در هر مثلث، با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازه زاویه بین آنها نشان دهید :

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B.$$

$$\left. \begin{array}{l} S = \frac{1}{2} BC \times AH \\ \sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \times \sin B \end{array} \right\} \Rightarrow S = \frac{1}{2} BC \times AB \times \sin B$$

۲ در راه پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است. می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم. الف) ابتدا اندازه زاویه B را به دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم کنید و آن را BH بنامید.

$$\widehat{B} + 60^\circ + 65^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 55^\circ$$

ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویه A به دست آورید.

$$\sin 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{30} \Rightarrow BH = 15\sqrt{3}$$

پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویه C، طول طناب دوم را پیدا کنید.

$$\sin 65^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow 0.906 = \frac{15\sqrt{3}}{BC} \Rightarrow BC = \frac{15\sqrt{3}}{0.906} \approx 28.6665$$

۲ مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه نردبان با سطح زمین  $\theta = 3^\circ$  باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصله پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟

$$\sin \theta = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{8} \Rightarrow 2BC = 8 \Rightarrow BC = 4$$

اکنون به کمک رابطه فیثاغورس داریم :

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \Rightarrow AB = \sqrt{48}$$

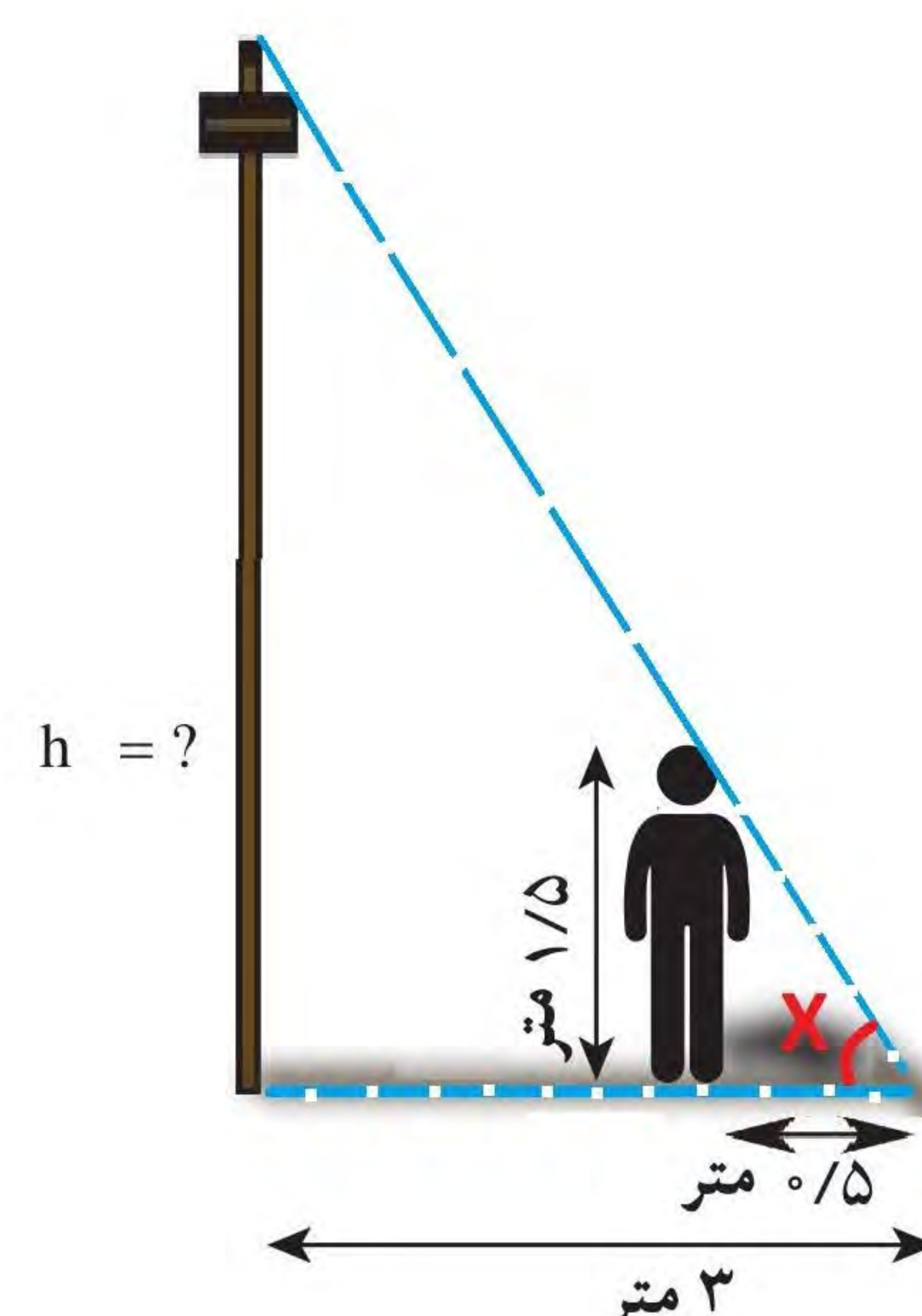
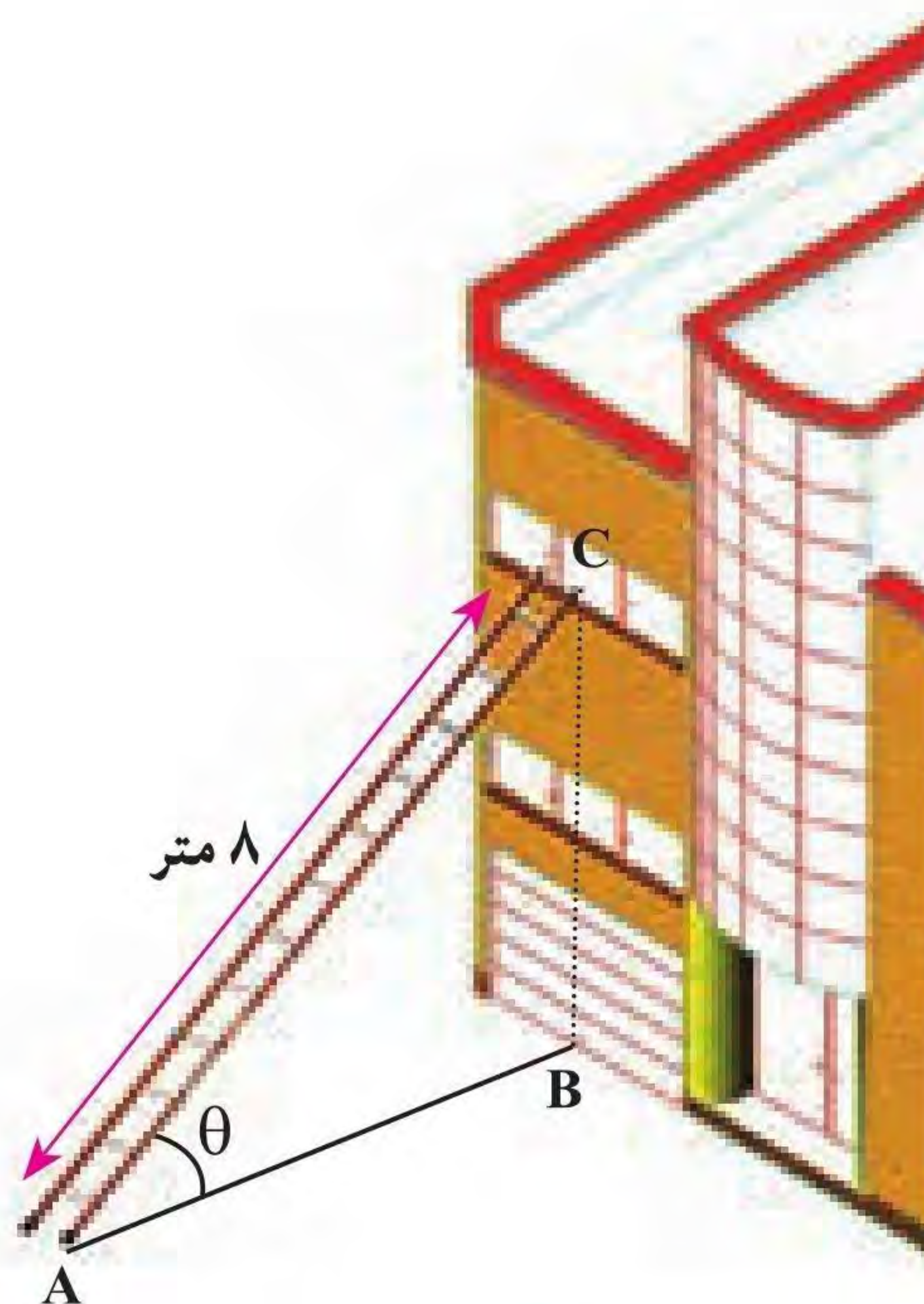
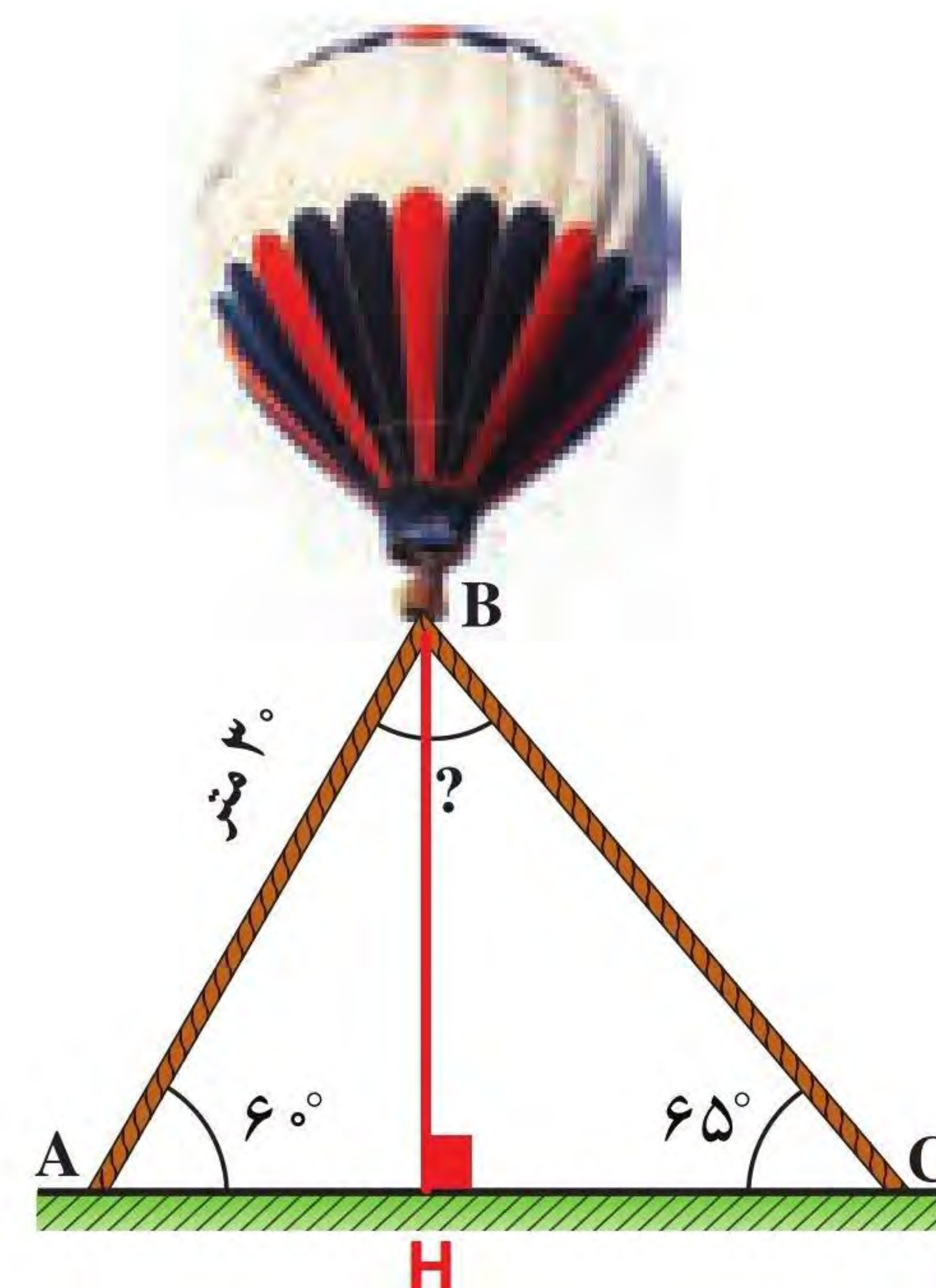
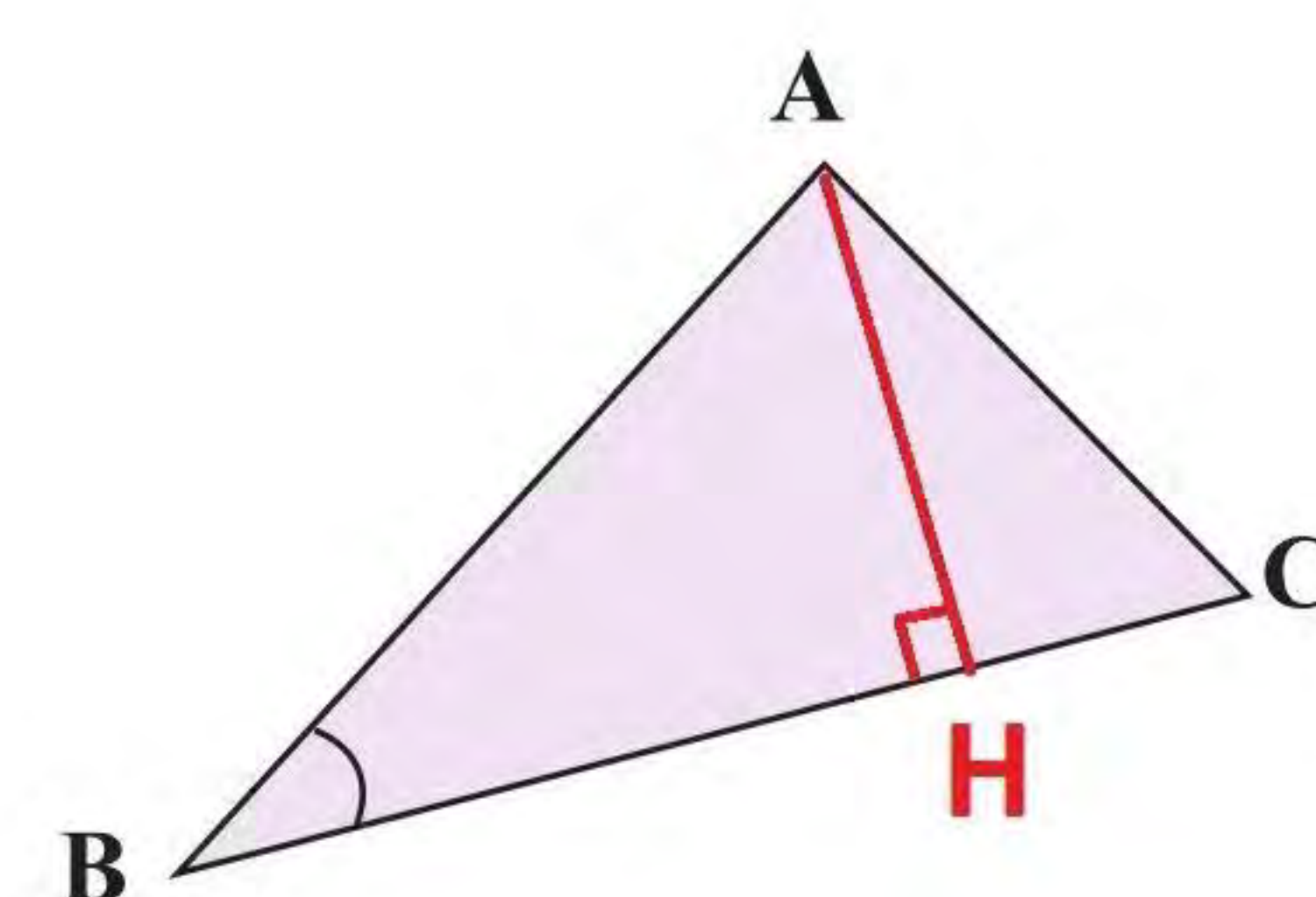
تمرین

۱ نسرین می‌خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایه آن ۳ متر است، حساب کند. قد نسرین ۱/۵ متر و طول سایه او در همان لحظه ۵/۰ متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟

شکل کتاب ایراد داشته که آن را اصلاح کرده و جواب می‌دهیم :

$$\tan x = \frac{h}{3} \text{ و در مثلث قائم الزاویه ی کوچک } \tan x = \frac{1/5}{5/0}$$

$$\text{می باشد. در نتیجه می توان نوشت: } \frac{1/5}{5/0} = \frac{h}{3} \Rightarrow h = 9 \text{ یعنی ارتفاع تیر برق ۹ متر است.}$$





$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \times AB \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم} = 6 \times S_{AOB} = 6 \times \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

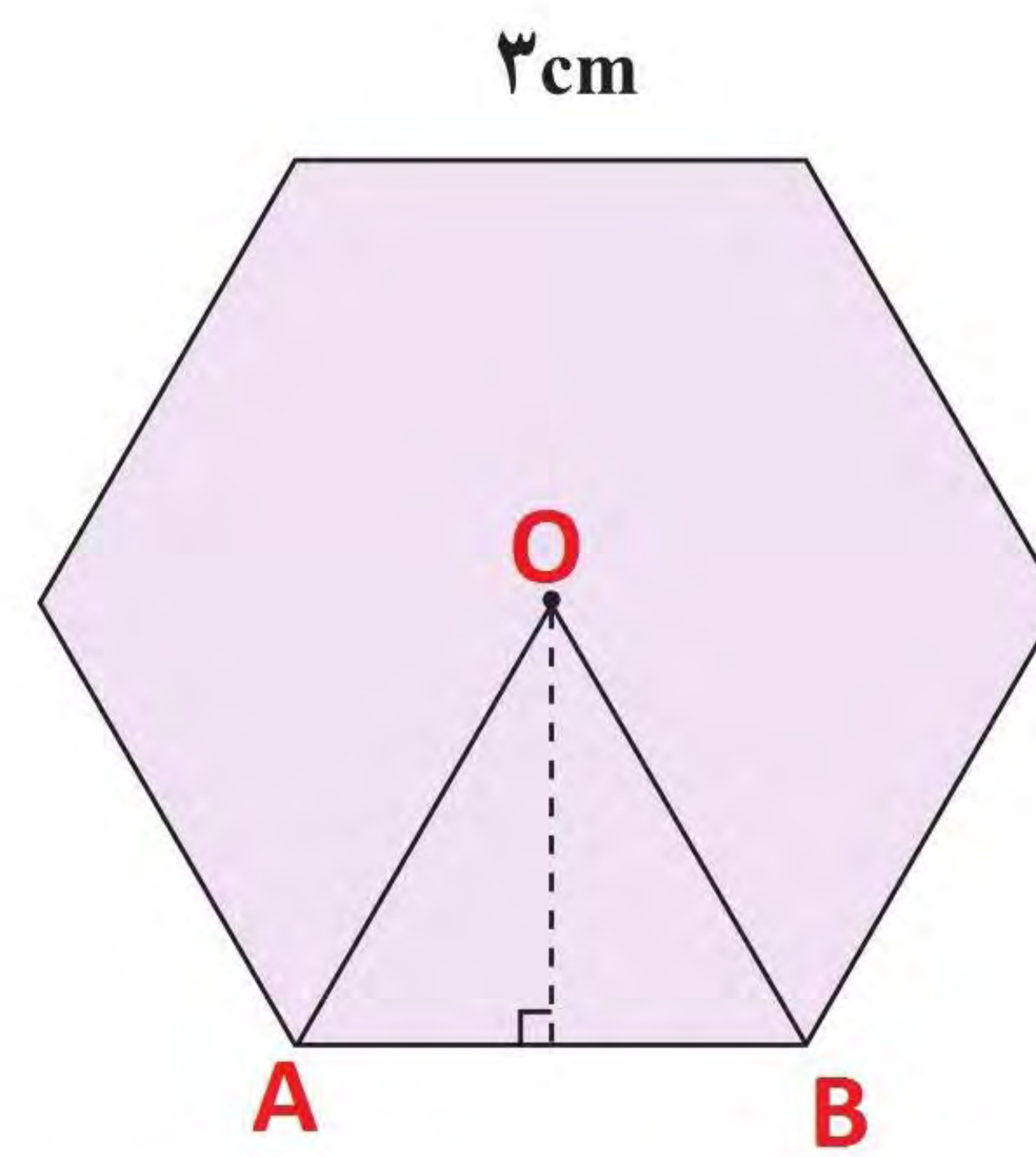


ماهواره‌ها به دور زمین در یک مسیر بسته، که آن را مدار می‌نامند، در حال گردش هستند. این مسیرها می‌توانند دایره‌ای یا بیضوی باشند، اما مرکز زمین در هر حالت در مرکز یا در نقطه کانونی مسیر آن قرار می‌گیرد. ماهواره‌ها روی سه نوع مدار که بستگی به نوع کاربرد آن دارد، قرار می‌گیرند:

ماهواره‌های مدار پایین زمین، مدار قطبی و مدار زمین‌ایست. برخی از ماهواره‌های هواشناسی و ماهواره‌های جاسوسی از نوع مدار پایین زمین‌اند. در این فاصله، چرخش ماهواره‌ها با حرکت دورانی زمین کاملاً هم‌زمان و برابر است و باعث می‌شود ماهواره نسبت به نقطه مفروض روی زمین ثابت بماند.

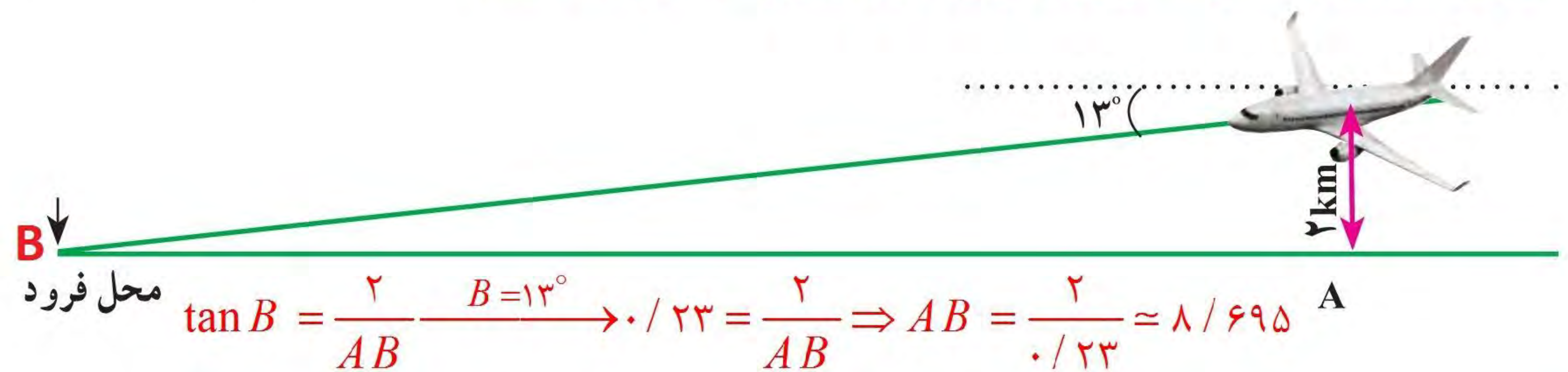
ماهواره مدار زمین‌ایست، نسبت به زاویه‌ای که ایستگاه زمینی آن را می‌بیند، ثابت است، در نتیجه احتیاجی به تغییر جهت آنتن نیست و آنتن هر ماهواره می‌تواند حداکثر ۴/۴۲ درصد سطح کره زمین را بپوشاند. تمام ماهواره‌های مخابراتی و تلویزیونی از این نوع هستند.

۲ مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.

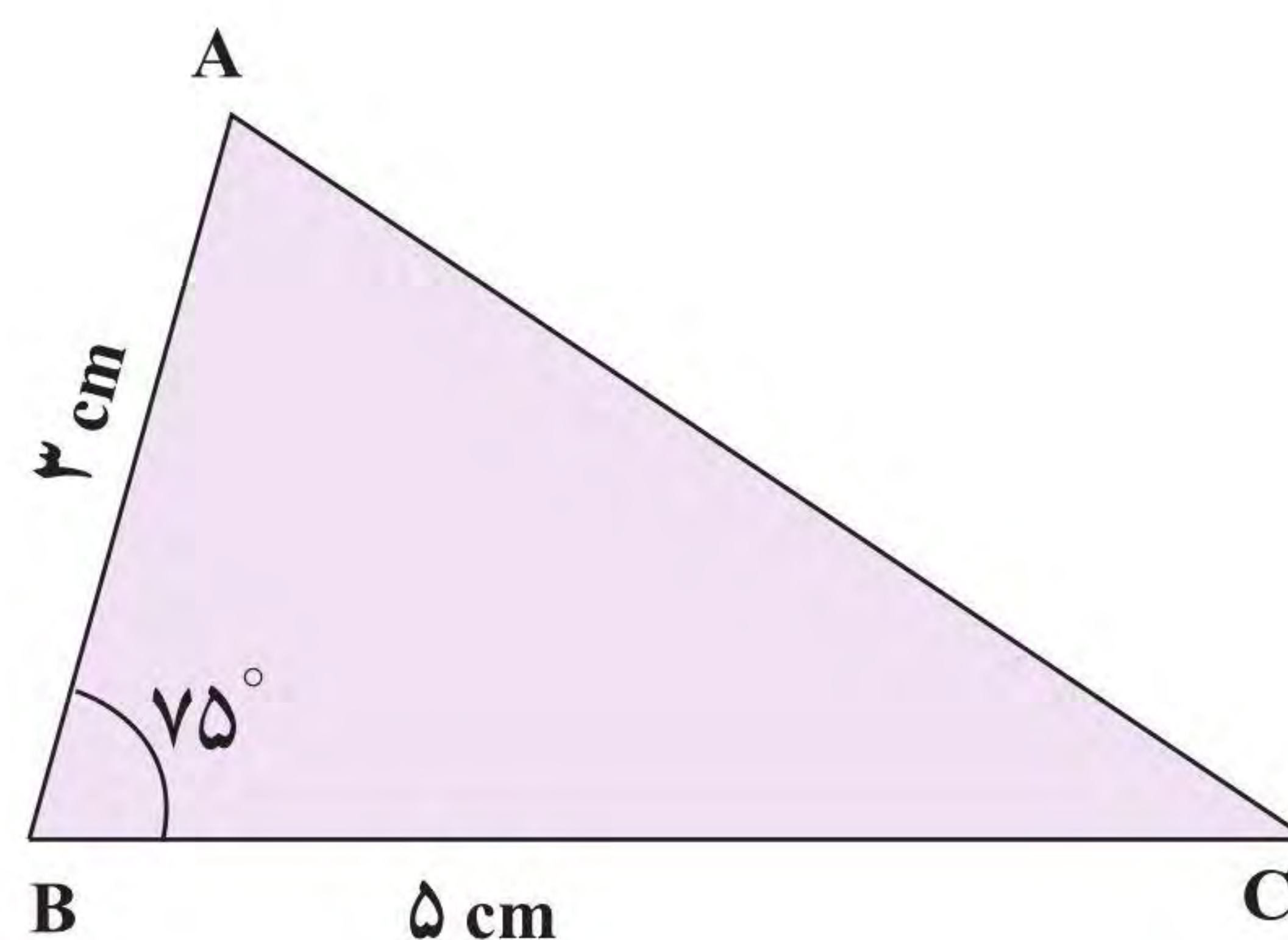


مطابق شکل، هر شش ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی الاضلاع ساخته شده است بنابراین مثلث AOB متساوی الاضلاع است  
بنابراین:  $OA = 3$   
 $\hat{A} = 60^\circ$

۳ یک هواپیما در ارتفاع ۲ km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق حدود ۱۳° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه A فرود می‌آید.  
طبق قضیه ی خطوط موازی، زاویه ی B نیز ۱۳ درجه است.  
 $\tan 13^\circ \approx 0.23$

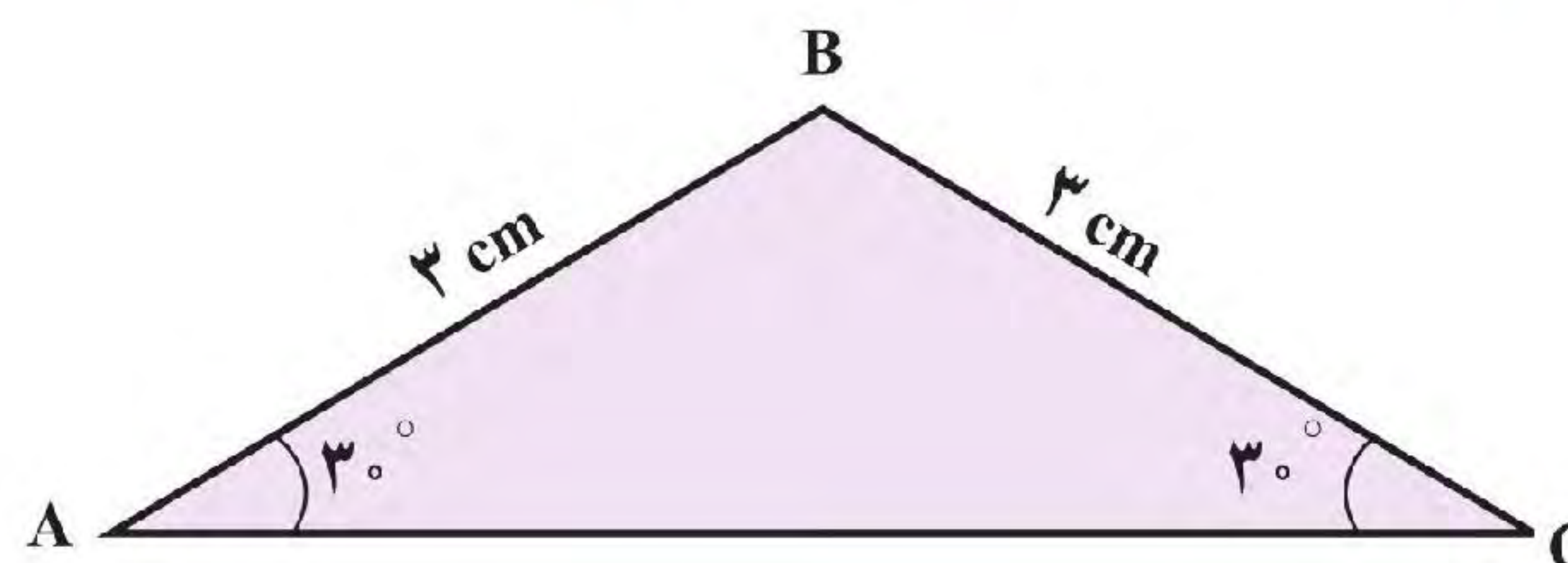


۴ فرض کنید  $\sin 75^\circ \approx 0.96$ . مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.



$$S = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin 75^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times 0.96 = 7.2$$

۵ مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



روش اول (با استفاده از ماشین حساب):

$$\hat{B} + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 120^\circ$$

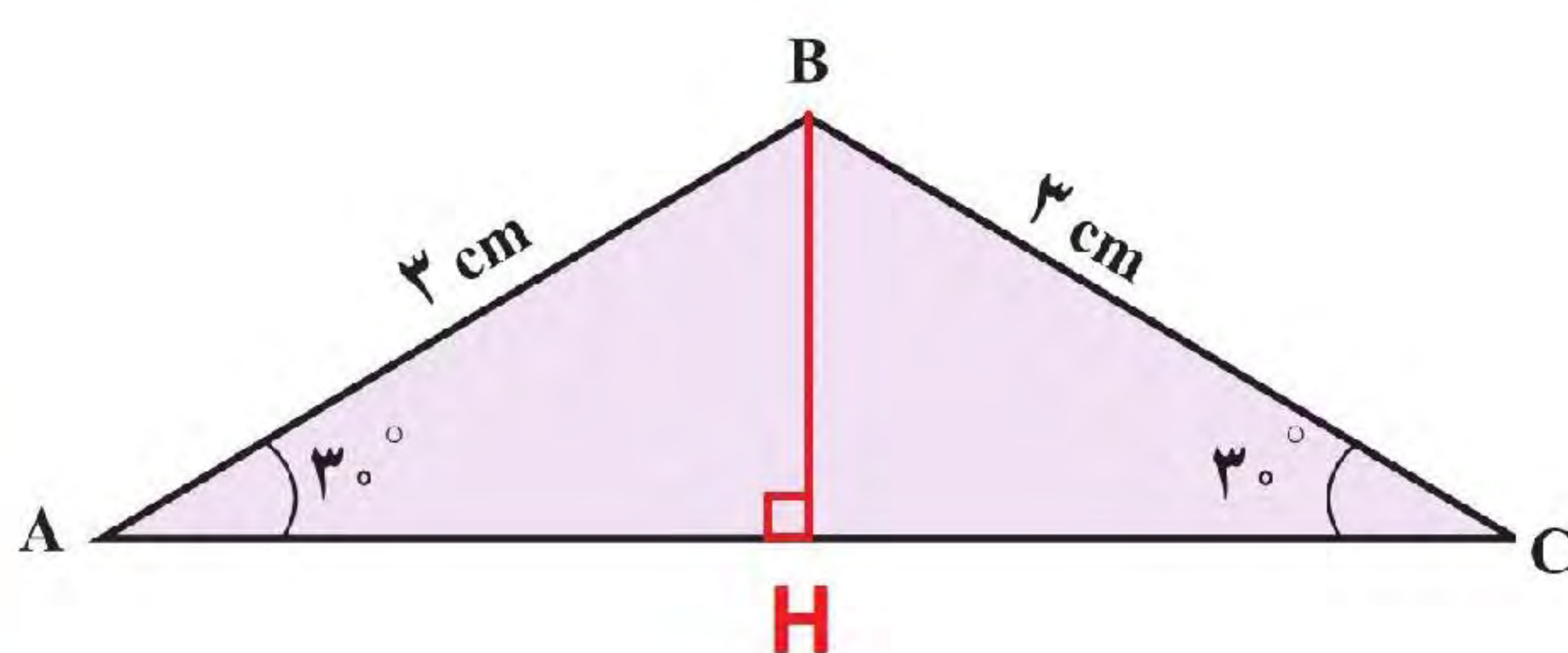
$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin 120^\circ = \frac{9}{2} \times 0.866 = 3.897$$

روش دوم (بدون استفاده از ماشین حساب):

$$\cos 30^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{3} \Rightarrow AH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\triangle ABH} = \frac{1}{2} AH \times AB \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{8}$$

$$S_{\triangle ABC} = 2 \times S_{\triangle ABH} = 2 \times \frac{9\sqrt{3}}{8} = \frac{9\sqrt{3}}{4} = 3.897$$

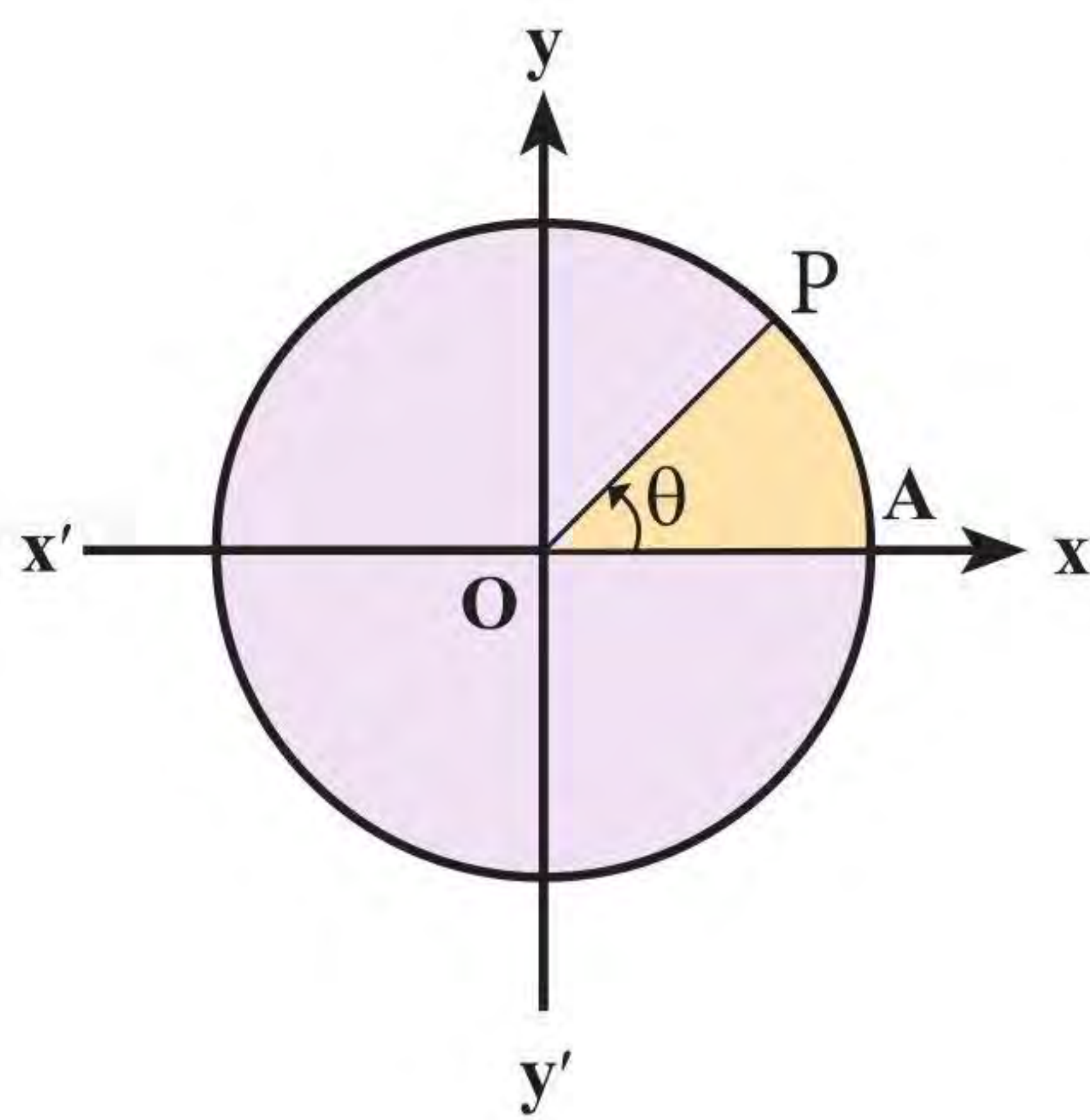




## درس دوم: دایره مثلثاتی



می‌توان از دایره مثلثاتی برای بیان مکان، زمان و توصیف بسیاری از حرکات همانند چرخش، حرکت دورانی، حرکات دوره‌ای، حرکات تناوبی و حرکات رفت و برگشتی در یک مسیر مشخص، استفاده کرد. یکی از این کاربردها، استفاده در سیستم رادارهاست.



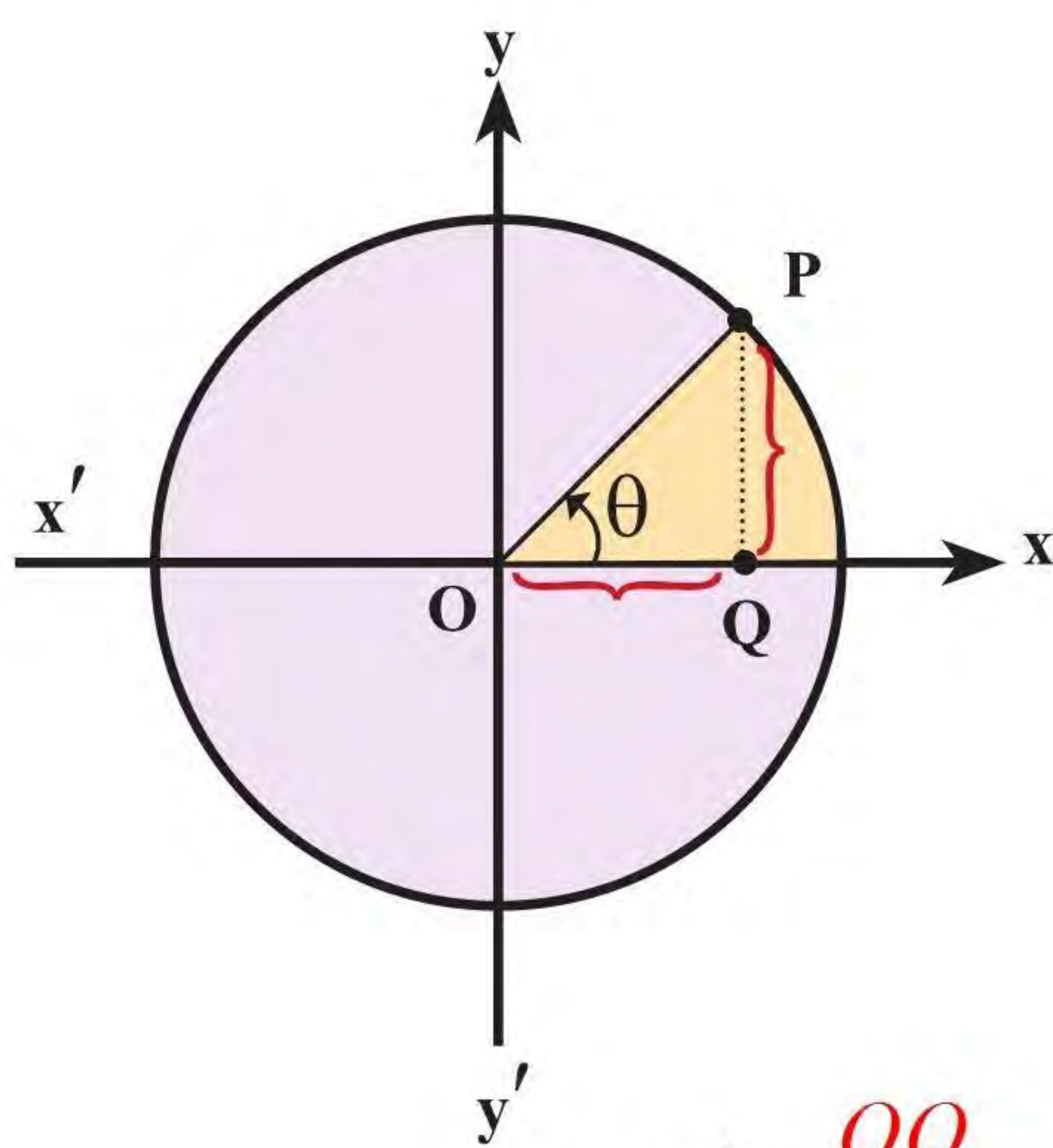
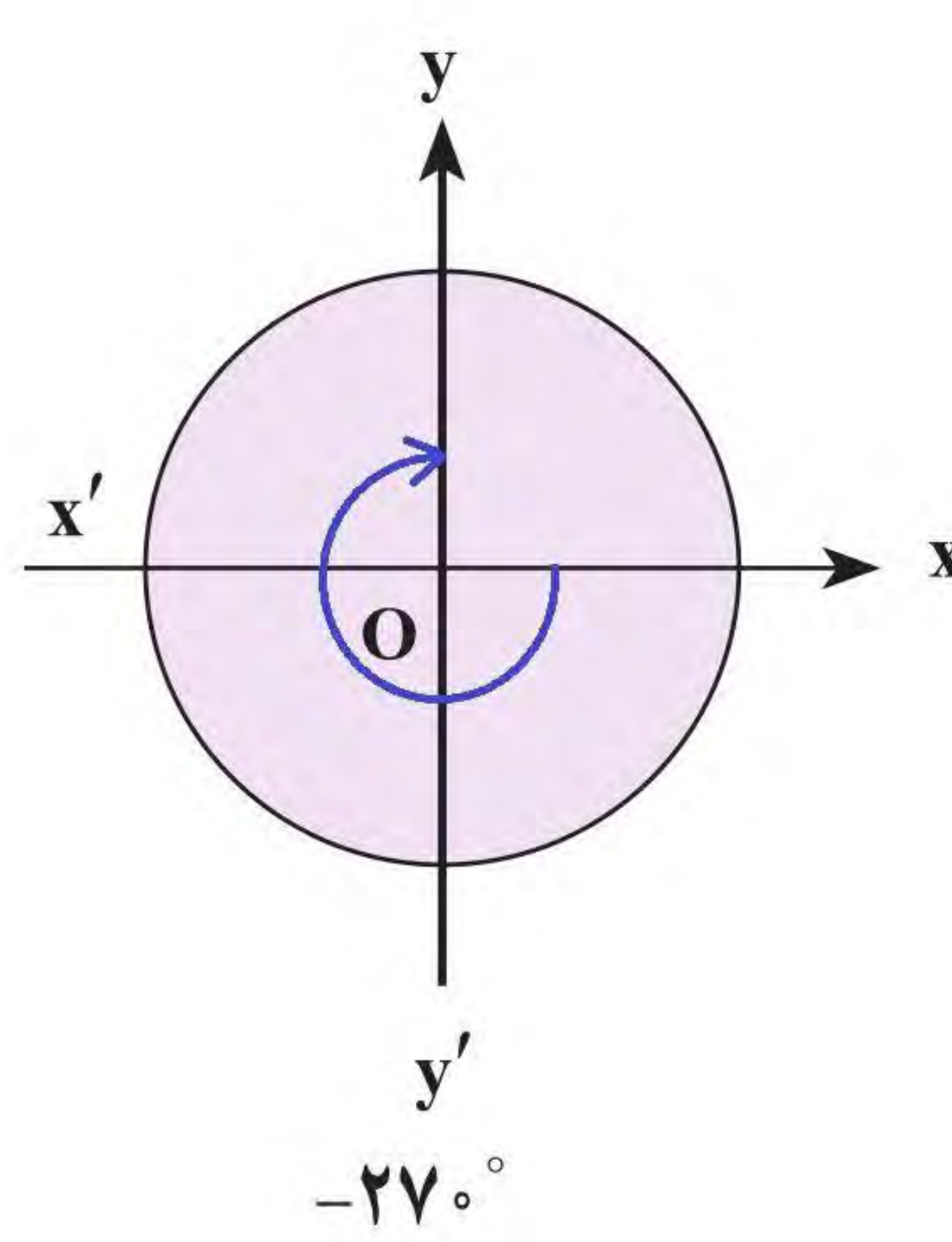
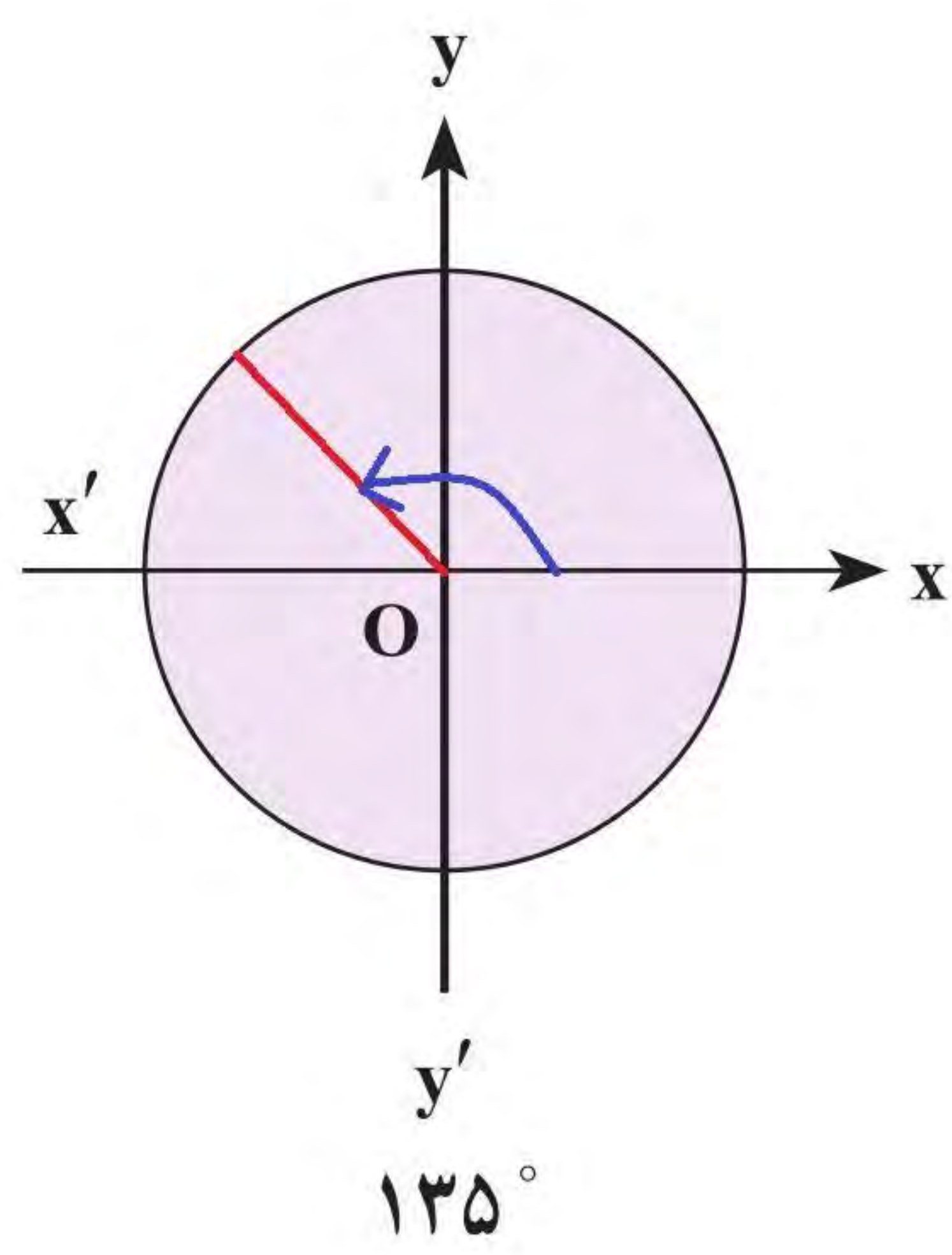
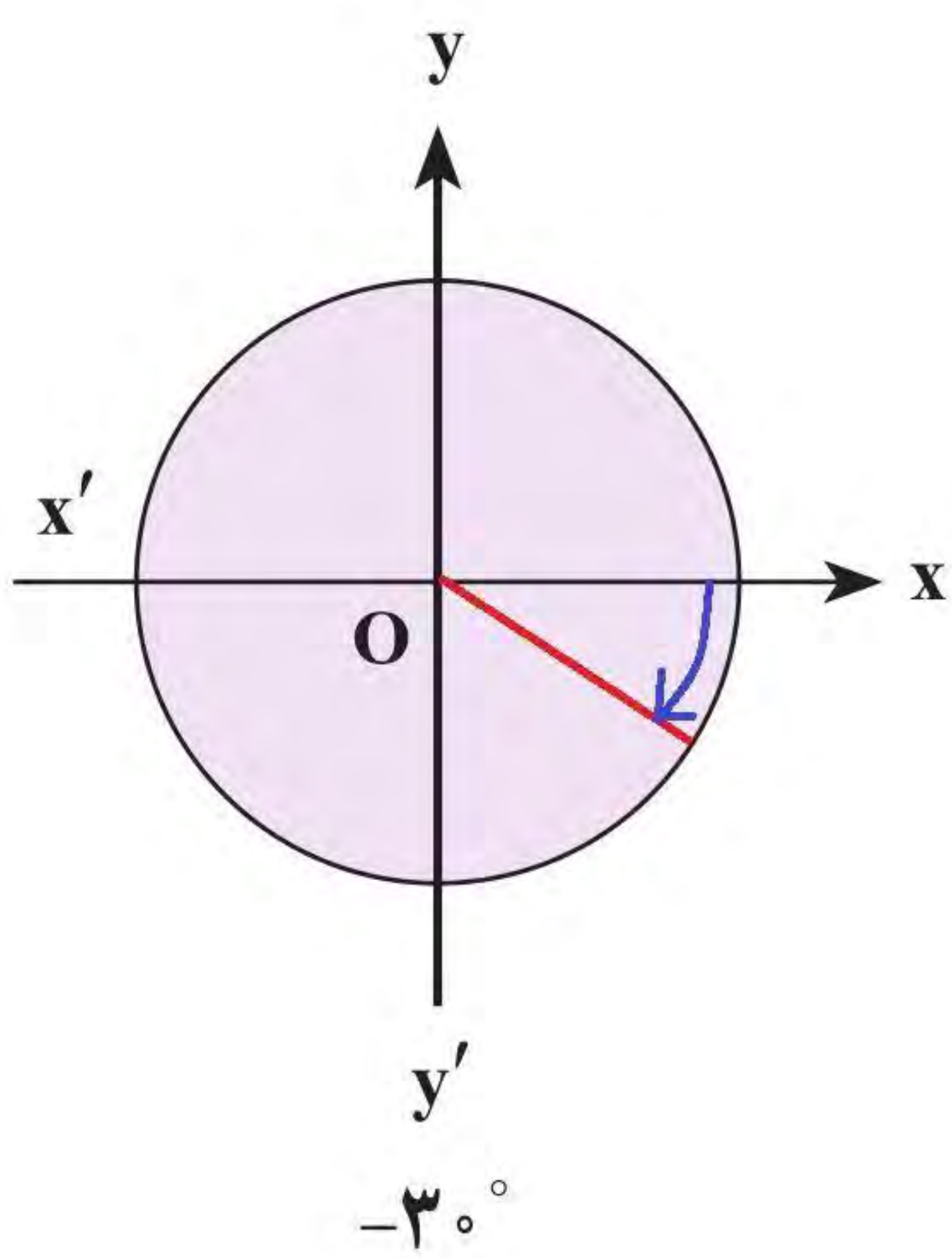
دایره روبه‌رو، به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ را در نظر بگیرید. نقطه A مبدأ حرکت برای رسم زاویه است. اگر نقطه P روی این دایره در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویه AOP مثبت و حرکت در جهت عقربه‌های ساعت، منفی است. چنین دایره‌ای را یک دایره مثلثاتی می‌نامیم.

## مثال

در هر یک از دایره‌های مثلثاتی سمت راست، مقدار زاویه‌های  $9^\circ$ ،  $-9^\circ$ ،  $225^\circ$  و  $-21^\circ$  داده شده‌اند.

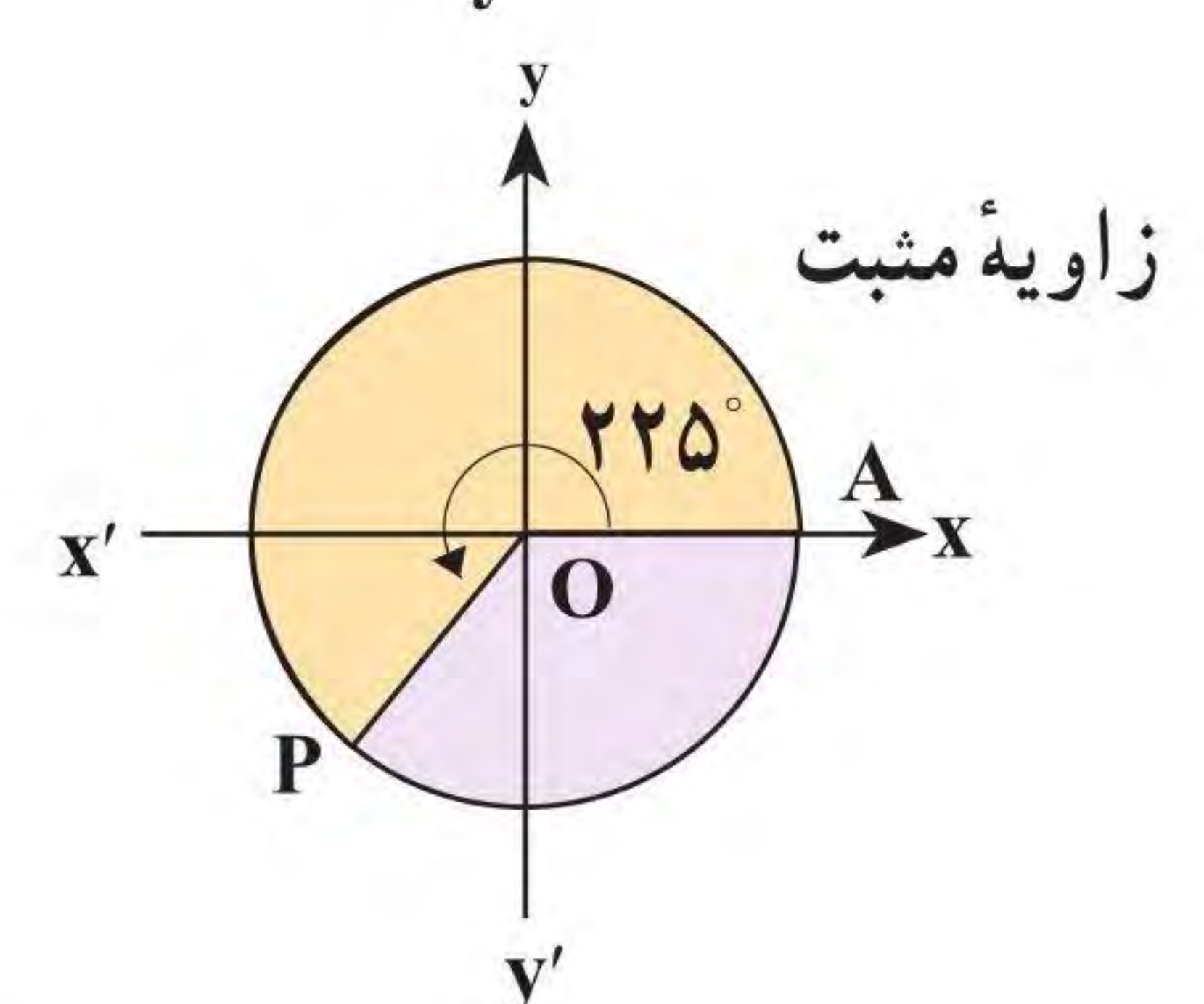
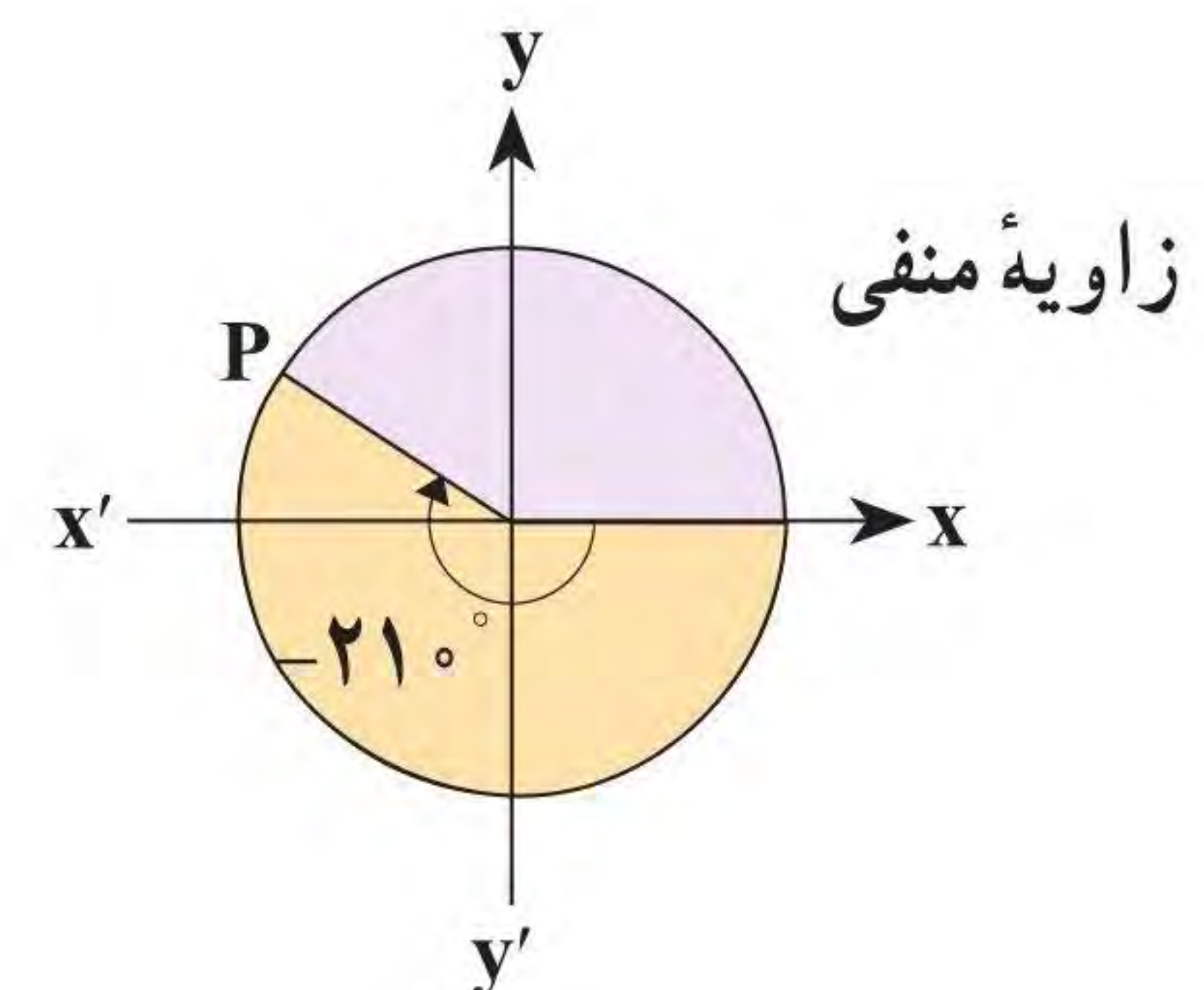
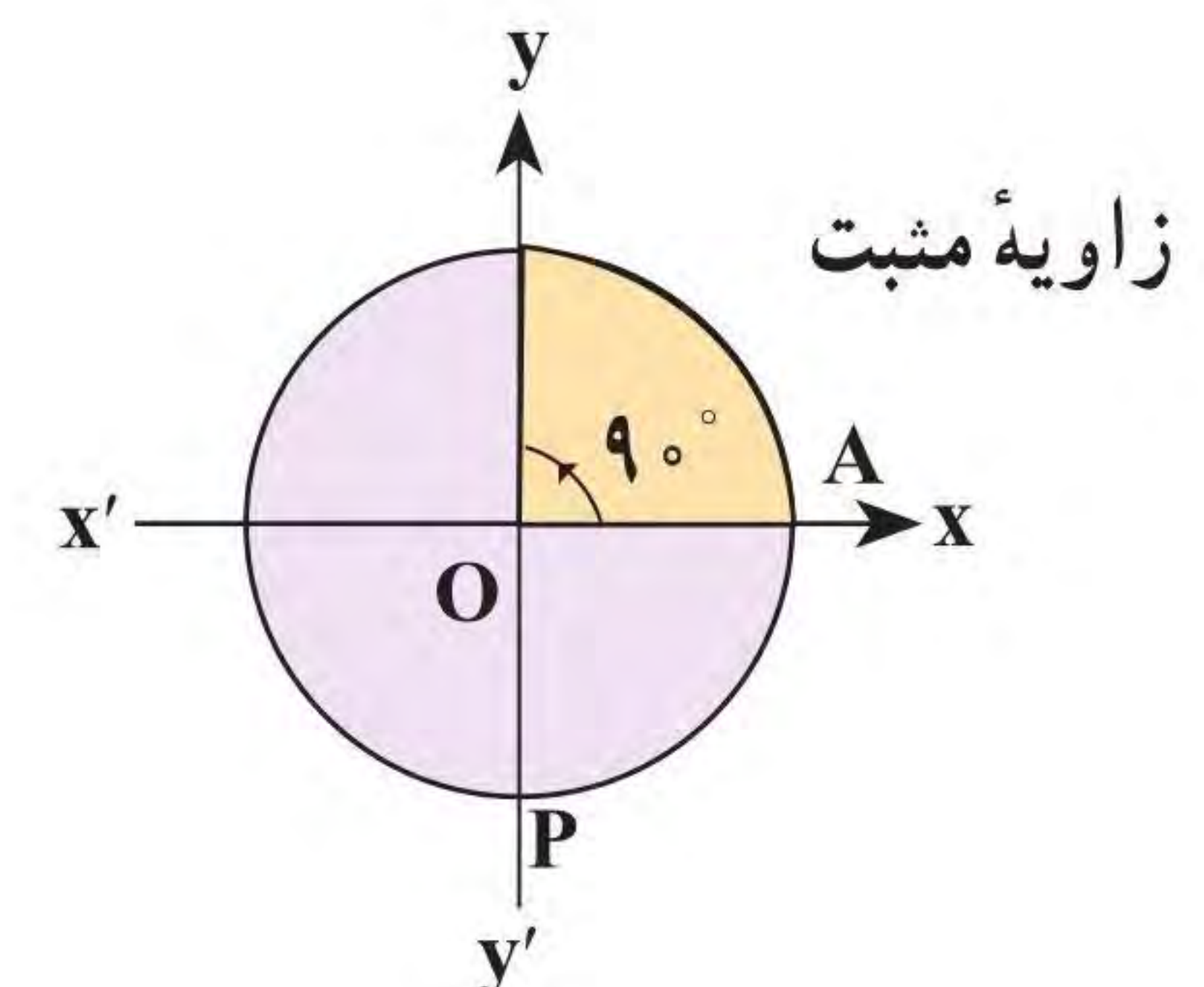
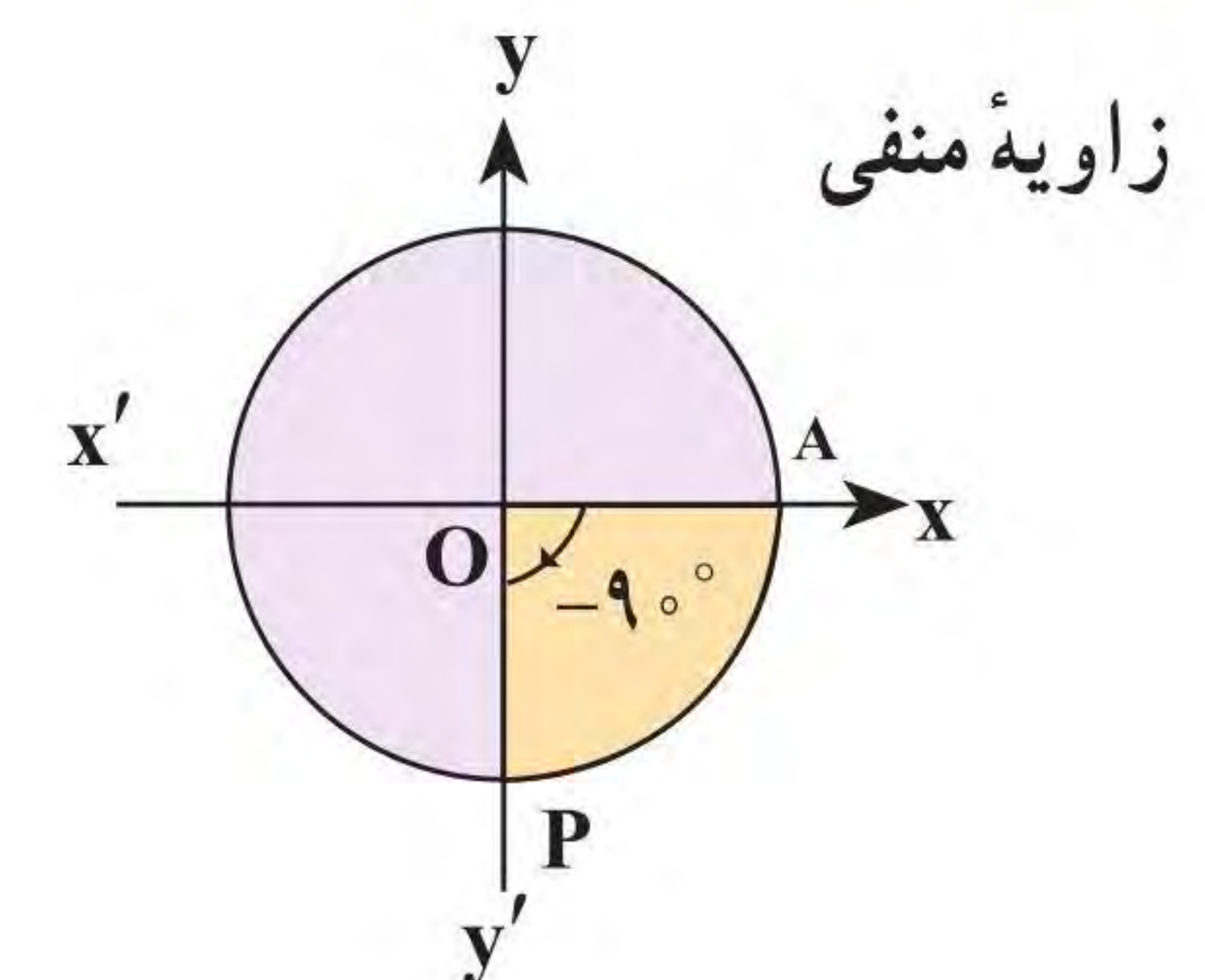
## فعالیت

۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره‌های مثلثاتی داده شده، نشان دهید.



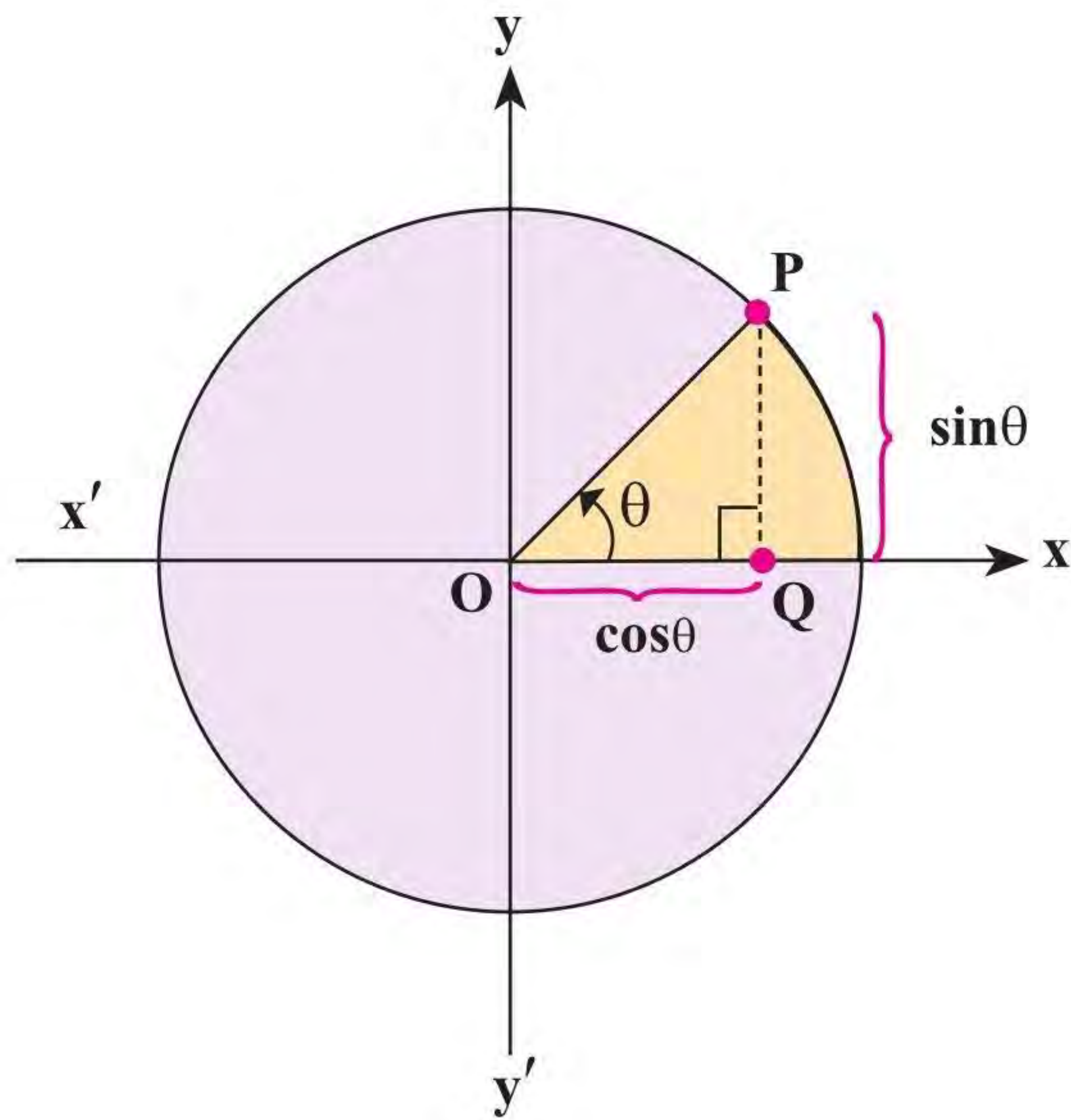
۲ فرض کنید  $P(x,y)$  نقطه‌ای دلخواه روی دایره مثلثاتی روبه‌رو باشد و  $\theta$  زاویه‌ای است که نیم خط  $\vec{OP}$  با محور  $\vec{Ox}$  می‌سازد. از نقطه P خطی بر محور  $\vec{Ox}$  عمود می‌کنیم و محل برخورد را Q می‌نامیم. الف) در مثلث OPQ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\theta$  را به دست آورید.

$$\cos \theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{1} = OQ \quad \text{و} \quad \sin \theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{1} = PQ \quad \text{و} \quad \tan \theta = \frac{PQ}{OQ}$$

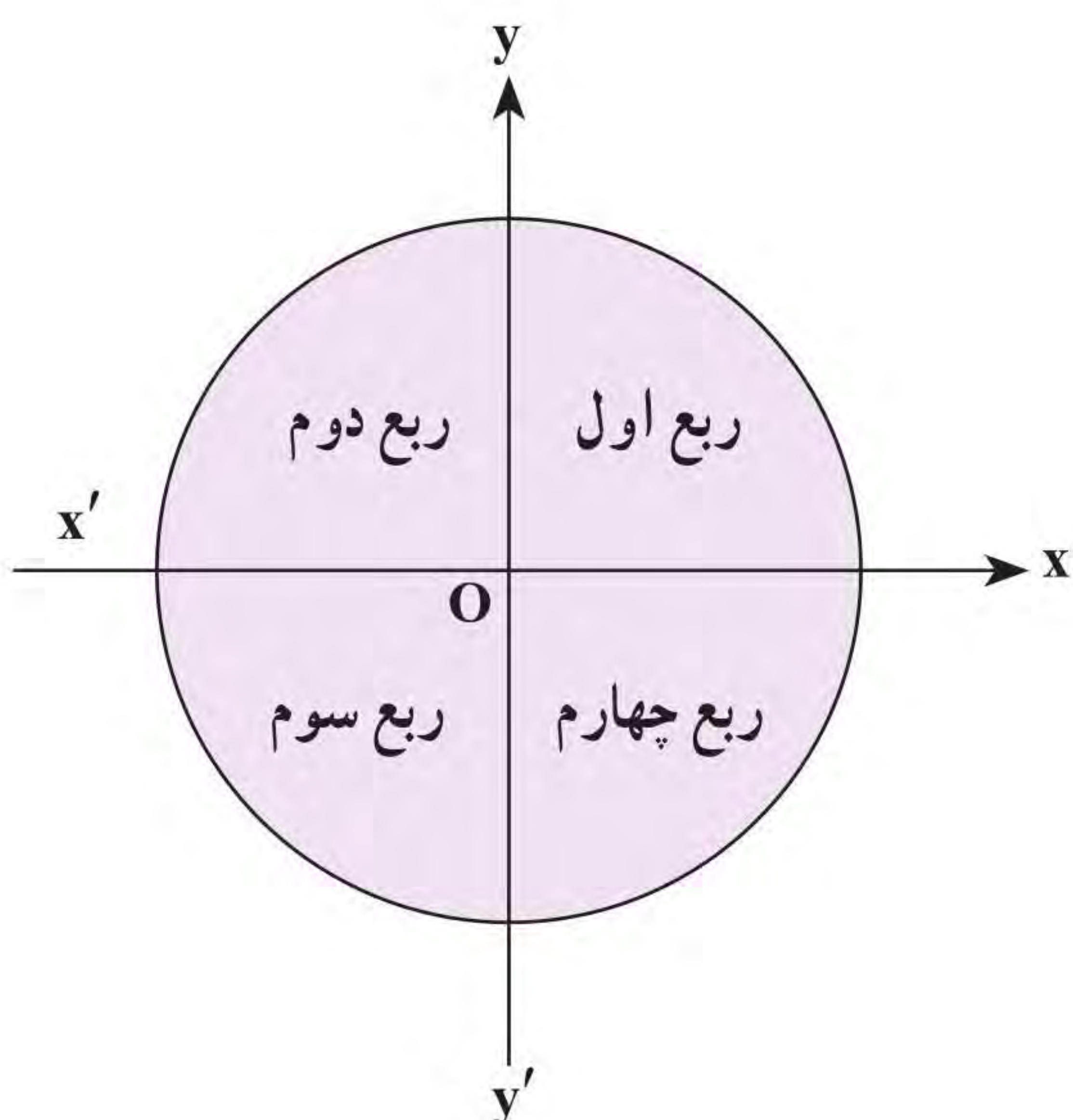




ب) با توجه به قسمت (الف) می توان دید فاصله  $Q$  تا مبدأ با  $\cos \theta$  برابر است و فاصله نقطه  $P$  تا پای عمود، یعنی نقطه  $Q$  با  $\sin \theta$  برابر است.



با توجه به قسمت (ب) محور  $x'Ox$  یا محور  $x$  ها را محور کسینوس ها و محور  $y'Oy$  یا محور  $y$  ها را محور سینوس ها می نامیم. به عبارت دیگر، اگر نقطه دلخواهی روی دایره مثلثاتی باشد که نیم خط  $OP$  با قسمت مثبت محور  $x$  ها زاویه  $\theta$  می سازد، آنگاه  $P$  نقطه ای با مختصات  $(x, y)$  است که در آن  $x = \cos \theta$  و  $y = \sin \theta$ .



**نکته:** دو محور عمود بر هم  $x'Ox$  و  $y'Oy$  صفحه را به چهار قسمت تقسیم می کنند. هر یک از این قسمت ها را یک ناحیه یا یک ربع مثلثاتی می نامیم. با توجه به جهت دایره مثلثاتی، ناحیه  $xOy$  را ربع اول، ناحیه  $x'Oy$  را ربع دوم، ناحیه  $x'Oy'$  را ربع سوم و ناحیه  $xOy'$  را ربع چهارم مثلثاتی می نامیم.

**نکته:** زاویه های  $0^\circ$ ،  $9^\circ$ ،  $18^\circ$ ،  $27^\circ$  و  $36^\circ$  زوایای مرزی هستند و آنها را در هیچ کدام از ناحیه های فوق در نظر نمی گیریم.

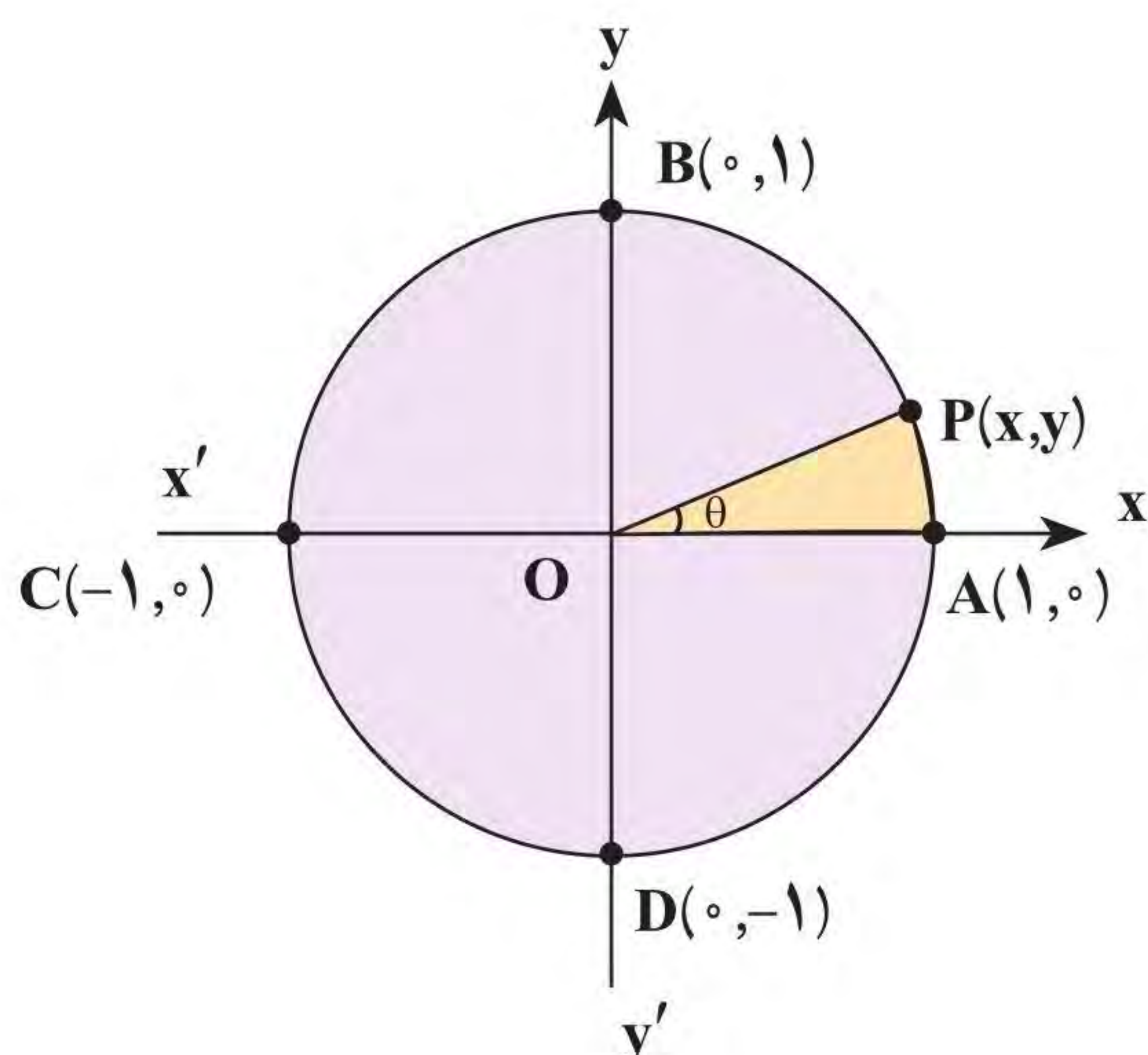
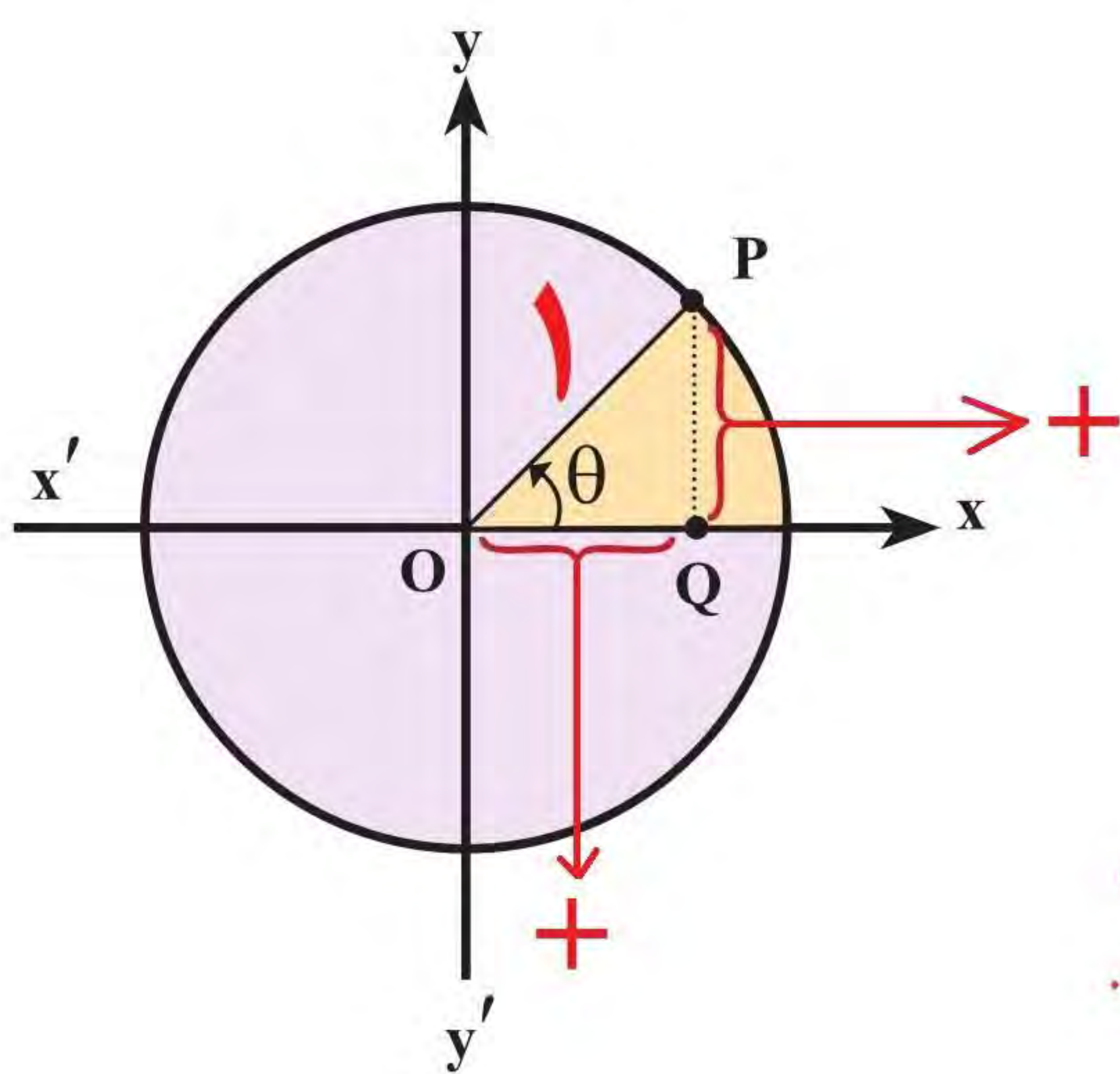
#### کار در کلاس

۱ مشخص کنید هر یک از زاویه های زیر در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می گیرد؟

الف) $-3^\circ$	ب) $65^\circ$	پ) $182^\circ$	ت) $-95^\circ$
چهارم	اول	سوم	سوم

۲ با توجه به آنچه در فعالیت قبل، به دست آوردید، توضیح دهید که اگر انتهای کمان روبه رو به زاویه ای در ربع اول باشد (زاویه در ربع اول باشد)، آنگاه چرا نسبت های مثلثاتی آن زاویه، همگی مثبت اند؟

در ناحیه ی اول، قسمت های مثبت دو محور مختصات وجود دارد (شکل روبرو). و می دانیم طبق تعریف، نسبت های مثلثاتی، همان نسبت اندازه های مشخص شده در شکل هستند لذا همگی مثبت خواهند بود.



#### مثال

می خواهیم نسبت های مثلثاتی زاویه  $^\circ$  را به دست آوریم. می دانیم در دایره مثلثاتی روبه رو،  $\sin \theta = y$  و  $\cos \theta = x$ . اگر  $\theta = 0^\circ$ ، آنگاه نقطه  $P$  روی نقطه  $A$  قرار می گیرد و داریم  $\sin 0^\circ = 0$  و  $\cos 0^\circ = 1$  همچنین  $\tan 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$  و  $\cot 0^\circ$  تعریف نمی شود (چرا؟).

$$\cot 0^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} \text{ زیرا}$$



### فعالیت

۱ در دایره مثلثاتی روبه‌رو اگر  $\theta = 90^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را پیدا کنید.

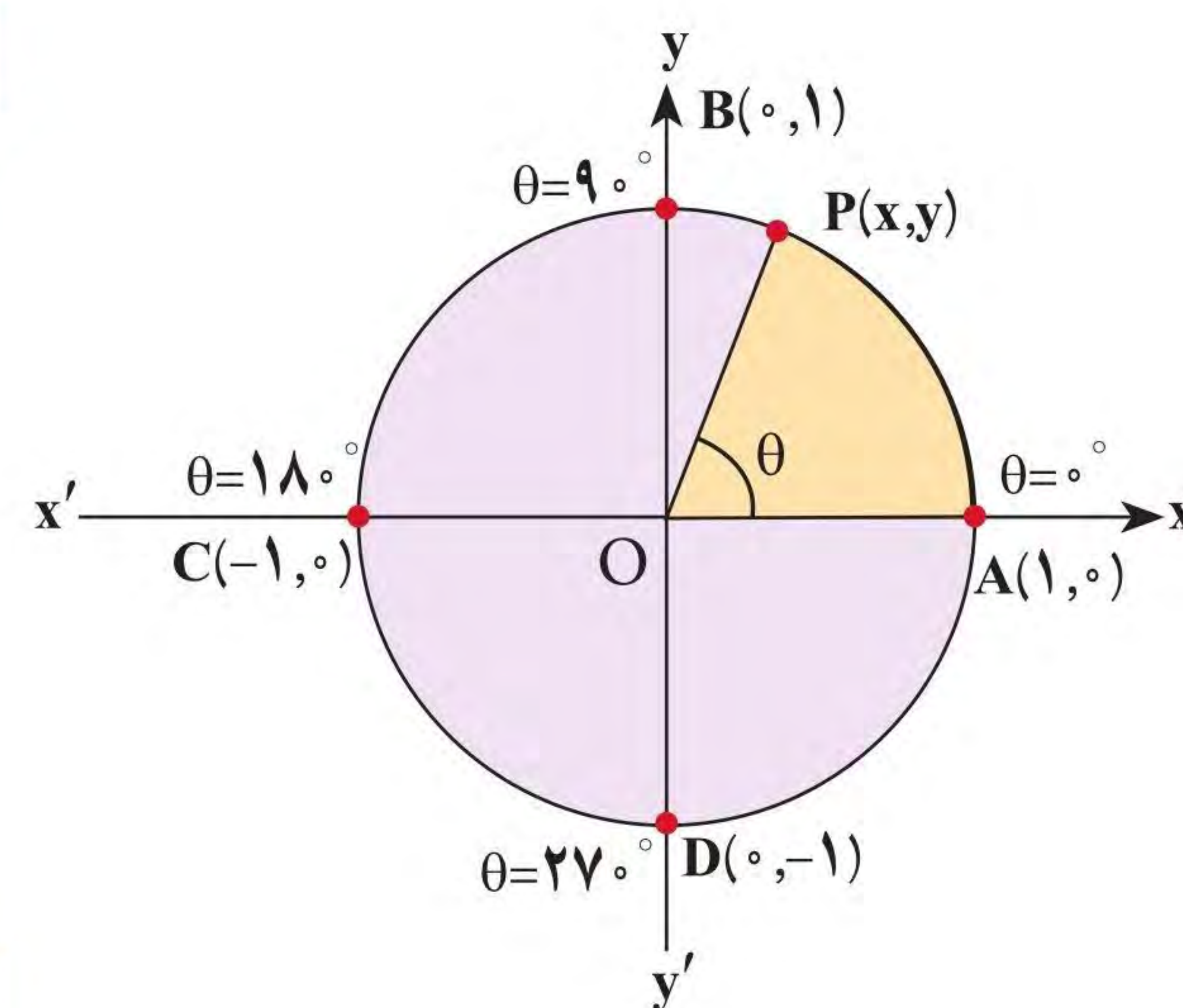
$90^\circ$  روی نقطه  $B(0, 1)$  واقع است بنابراین:  $\sin 90^\circ = y_B = 1$  و  $\cos 90^\circ = x_B = 0$  و تعریف نشده  $\tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$ .

۲ اگر  $\theta = 180^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را پیدا کنید.

$180^\circ$  روی نقطه  $C(-1, 0)$  واقع است بنابراین:  $\sin 180^\circ = y_C = 0$  و  $\cos 180^\circ = x_C = -1$  و  $\tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$ .

۳ اگر  $\theta = 270^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را پیدا کنید.

$270^\circ$  روی نقطه  $D(0, -1)$  واقع است بنابراین:  $\sin 270^\circ = y_D = -1$  و  $\cos 270^\circ = x_D = 0$  و تعریف نشده  $\tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0}$ .



### کار در کلاس

با توجه به نتایج بالا جدول زیر را کامل کنید :

مقدار	$0^\circ$	$90^\circ$		$270^\circ$	$360^\circ$
$\sin \theta$	0	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	0	-1	0	1
$\tan \theta$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
$\cot \theta$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

$0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \alpha$  در ربع اول است  
 $90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \alpha$  در ربع دوم است  
 $180^\circ < \alpha < 270^\circ \Rightarrow \alpha$  در ربع سوم است  
 $270^\circ < \alpha < 360^\circ \Rightarrow \alpha$  در ربع چهارم است

### فعالیت

۱ فرض کنید  $\theta$  زاویه‌ای در ربع سوم دایره مثلثاتی باشد. با توجه به اینکه  $y = \sin \theta$  و  $x = \cos \theta$

و در ربع سوم،  $x, y < 0$ ، علامت هریک از نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را در ربع سوم مشخص کنید.

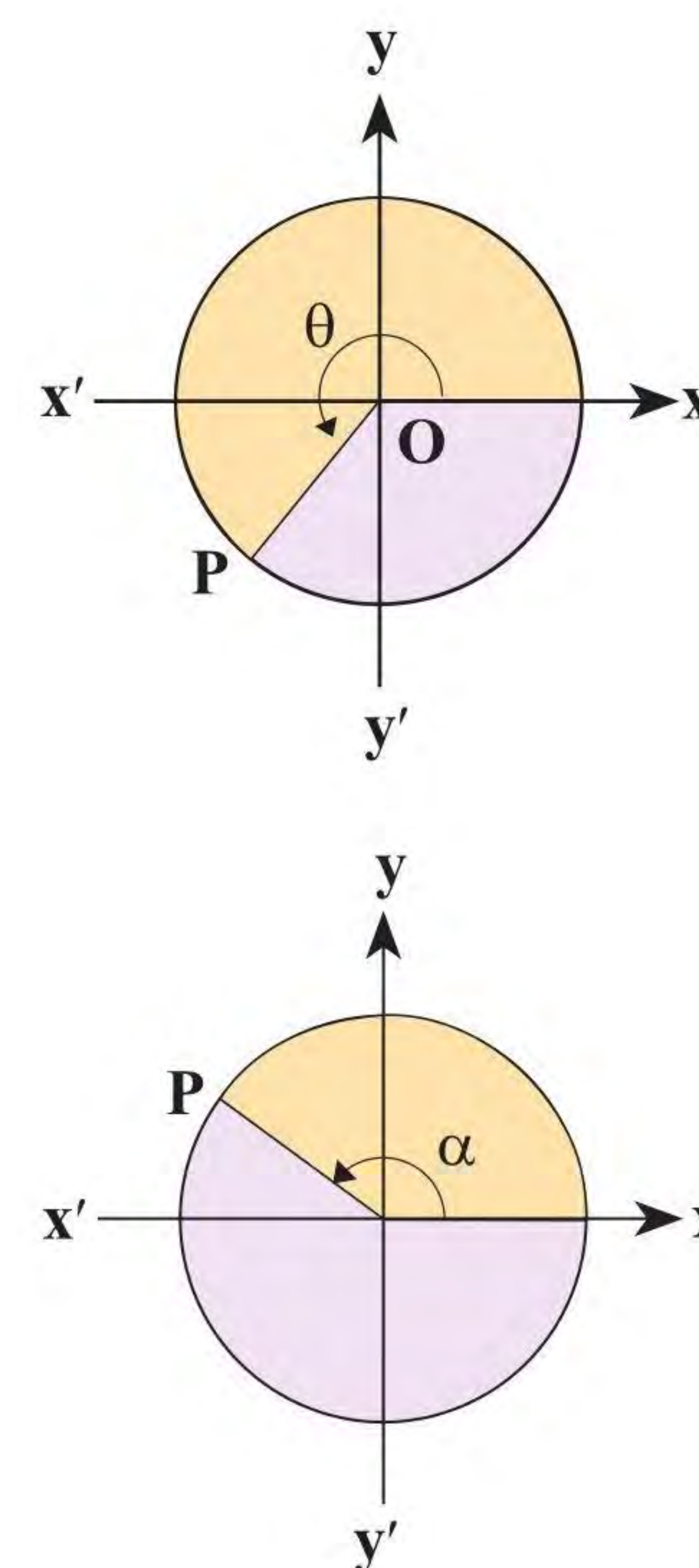
$\sin \theta < 0$  ،  $\cos \theta < 0$  ،  $\tan \theta > 0$ .

۲ فرض کنید  $\alpha$  زاویه‌ای در دایره مثلثاتی در ربع دوم باشد. فعالیت قبل را برای  $\alpha$  نیز

تکرار کنید.  $\sin \theta > 0$  ،  $\cos \theta < 0$  ،  $\tan \theta < 0$ .

۳ جدول زیر را کامل کنید :

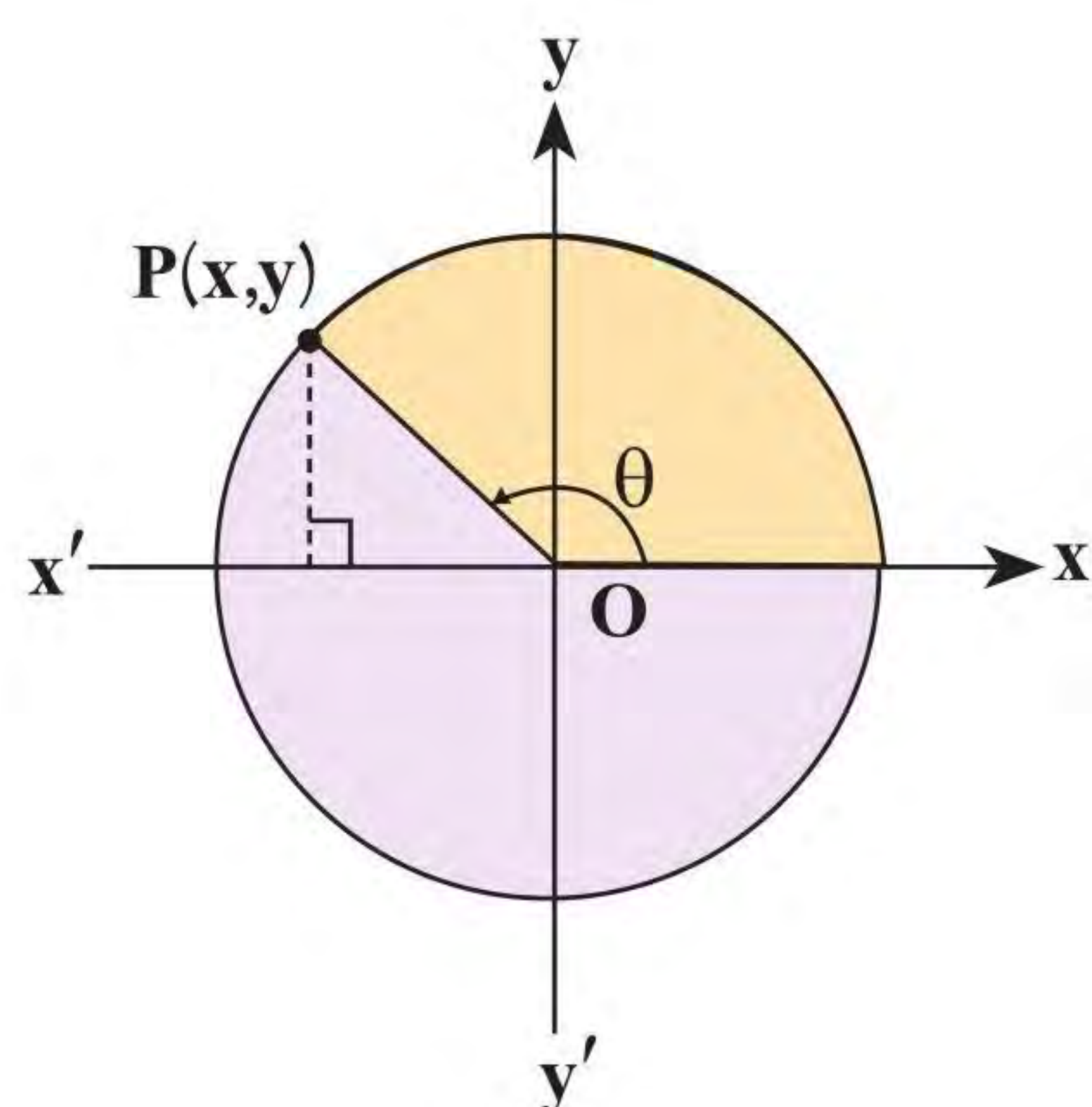
مقدار	ربع اول $x, y > 0$	ربع دوم .....	ربع سوم .....	ربع چهارم .....
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-
$\cot \theta$	+	-	+	-



نکته: برای هر زاویه دلخواه  $\theta$ ،

$-1 \leq \sin \theta \leq 1$  و  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ .





آقای جلالی، از دانش‌آموزان پرسید: اگر زاویه‌ای در ربع دوم مثلثاتی باشد و  $\sin \theta = \frac{5}{7}$ ، آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را پیدا کرد؟

**امین:** می‌دانیم  $\sin \theta = y = \frac{5}{7}$ ، بنابراین P نقطه‌ای به عرض  $\frac{5}{7}$  ... است.

**معلم:** درست است و حالا طول نقطه P چگونه به دست می‌آید؟

**امیرعلی:** طبق رابطه فیثاغورس، در مثلث قائم‌الزاویه داریم:  $x^2 + y^2 = 1$ . بنابراین  $x^2 + \frac{25}{49} = 1$  و در

نتیجه  $x^2 = \frac{24}{49}$ . اکنون داریم  $x = \pm \frac{2\sqrt{6}}{7}$ .

**معلم:** آفرین، این راه کاملاً درست است، ولی کدام مقدار قابل قبول است؟

**محمد مهدی:** چون  $\theta$  زاویه‌ای در ربع دوم است، پس طول نقطه P منفی است و از

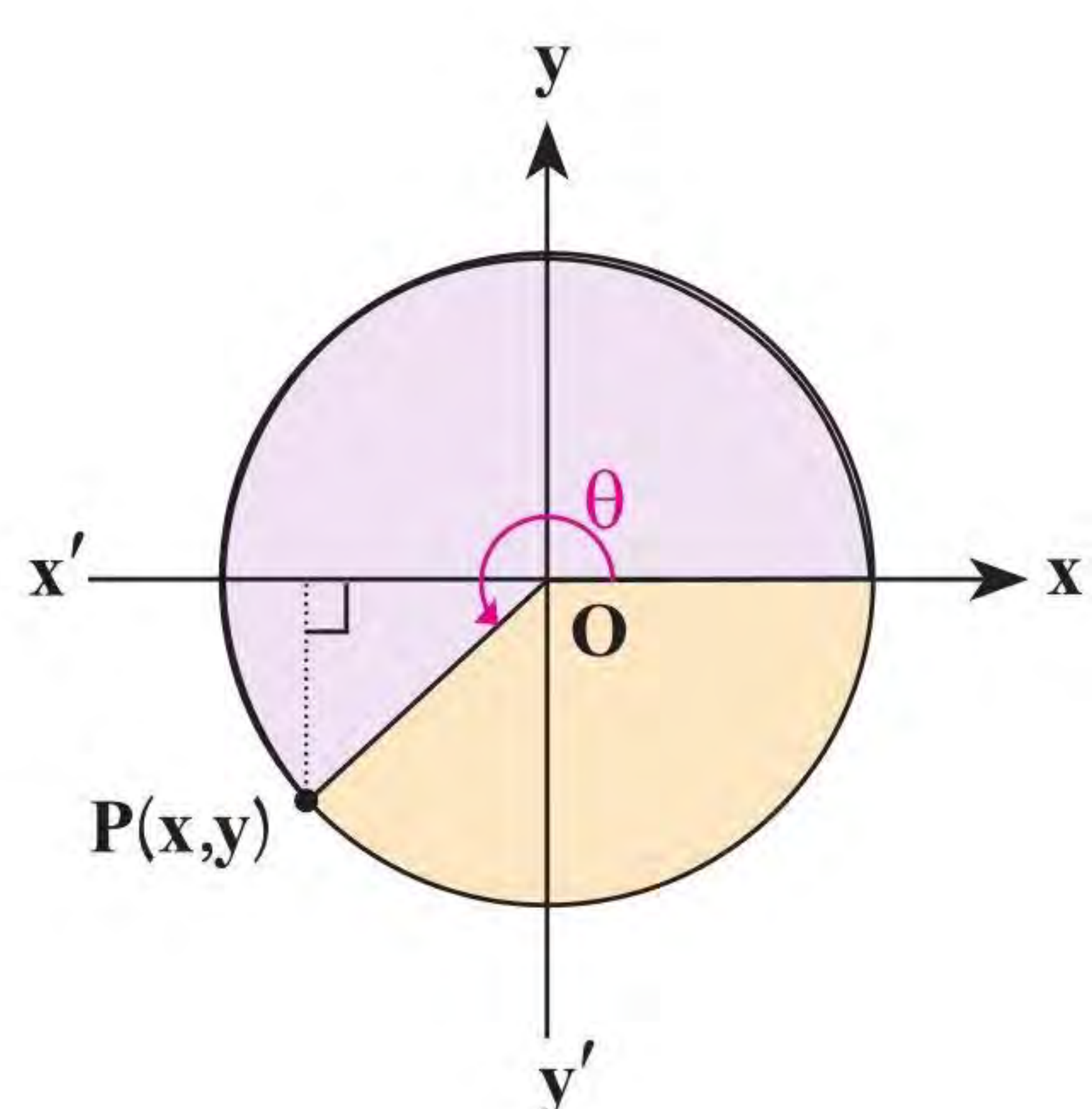
این رو  $x = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$  قابل قبول است.

**معلم:** استدلال محمد مهدی کاملاً منطقی است و در نتیجه P نقطه‌ای به مختصات

$(-\frac{2\sqrt{6}}{7}, \frac{5}{7})$  ... است. در نتیجه:

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{-2\sqrt{6}}, \quad \cos \theta = x = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

## فعالیت



۱ فرض کنید نقطه P روی دایره مثلثاتی قرار دارد به طوری که  $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . می‌دانیم  $\theta$  در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد، بنابراین  $y = \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

الف) مختصات نقطه P را به دست آورید.  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\theta$  را به دست آورید.  $\cot \theta = \frac{x}{y} = 1$  و  $\tan \theta = \frac{y}{x} = 1$

۲ اگر  $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ ، آنگاه در مورد ناحیه‌ای که  $\alpha$  در آن قرار می‌گیرد، بحث کنید.

$\alpha$  فقط می‌تواند در نواحی دوم یا سوم باشد، زیرا فقط در این نواحی کسینوس منفی است.

۳ زاویه‌ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

این زاویه باید در ناحیه ی چهارم باشد پس هر زاویه از این ناحیه قابل

قبول است به طور مثال زاویه ی ۳۰۰ درجه می‌تواند جواب باشد.



فعالیت

نمودار خط  $y=2x-4$  در شکل روبه‌رو رسم شده است. دو نقطه B و C روی این خط را در نظر بگیرید و خطی از آنها به محور x ها عمود کنید. پای عمودها را به ترتیب، E و F بنامید. الف) تانژانت زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.

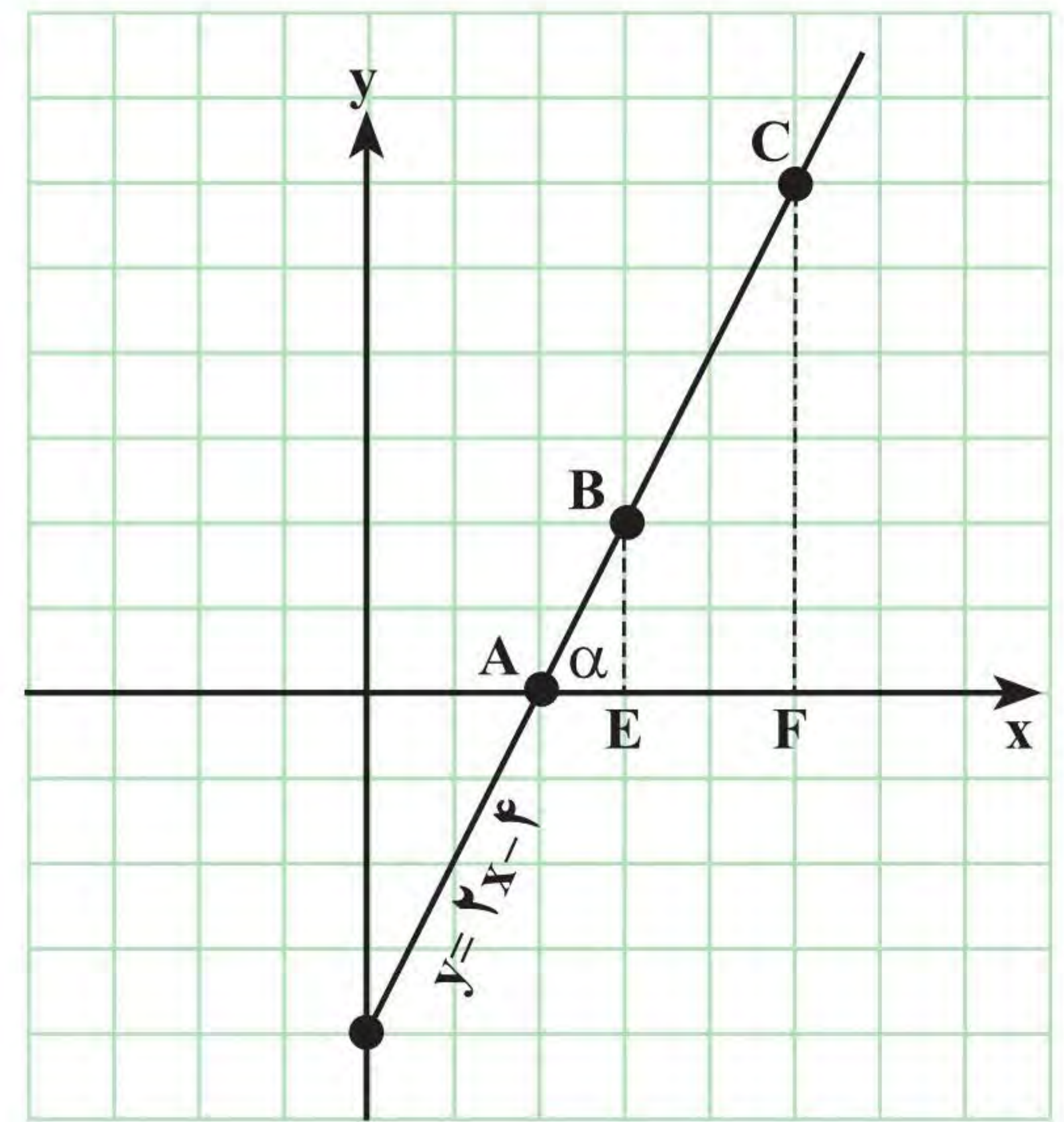
$$\tan \alpha = \frac{BE}{AE} = \frac{2}{1} = 2$$

ب) شیب این خط را پیدا کنید.

$$A(2,0), B(3,2) \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \frac{2-0}{3-2} = 2$$

پ) از مقایسه قسمت (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ توضیح دهید.

می‌توان نتیجه گرفت تانژانت زاویه بین خط و جهت مثبت محور افقی، برابر شیب خط است.



شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به عبارت دیگر، اگر  $\alpha$  زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه:

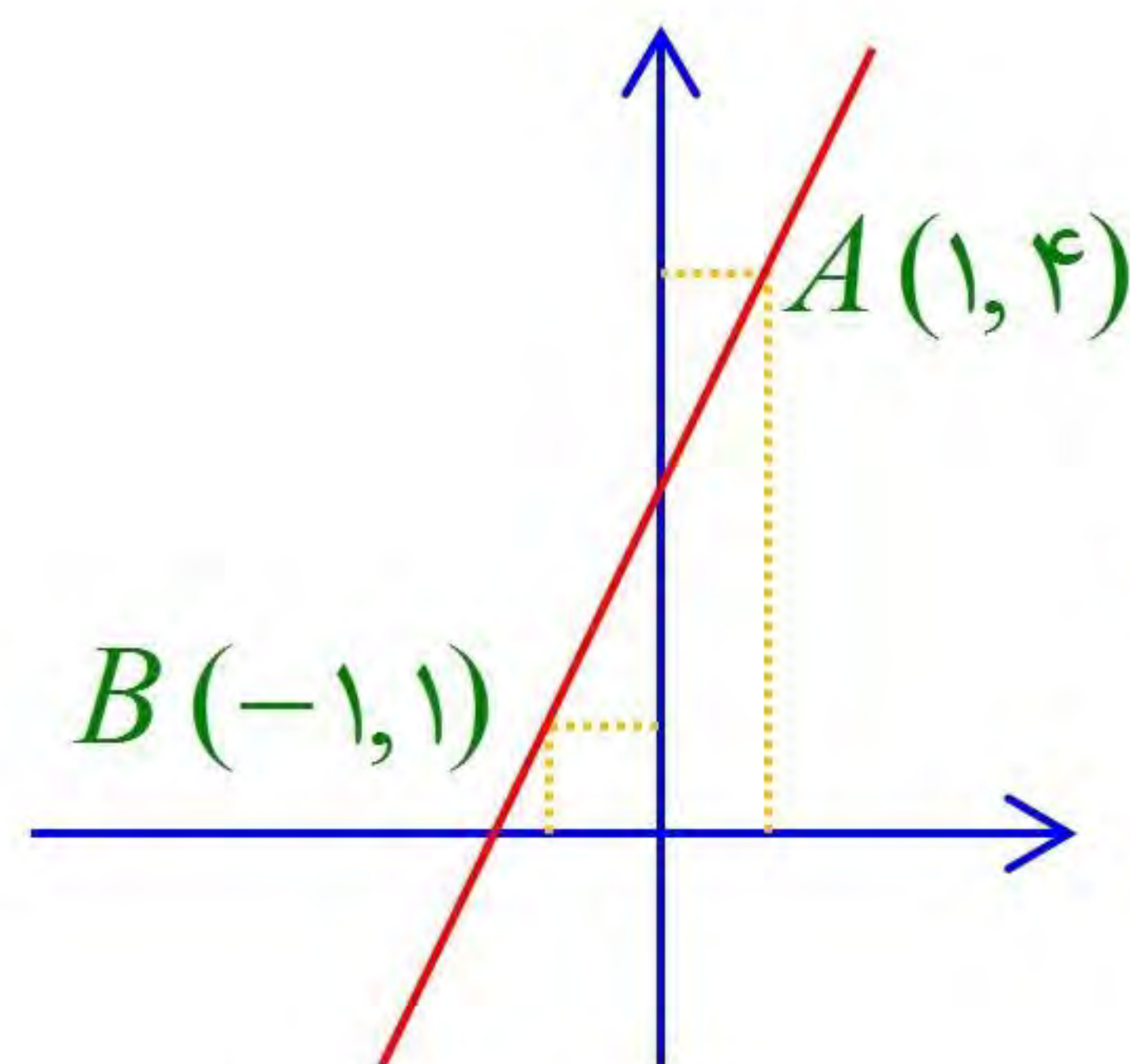
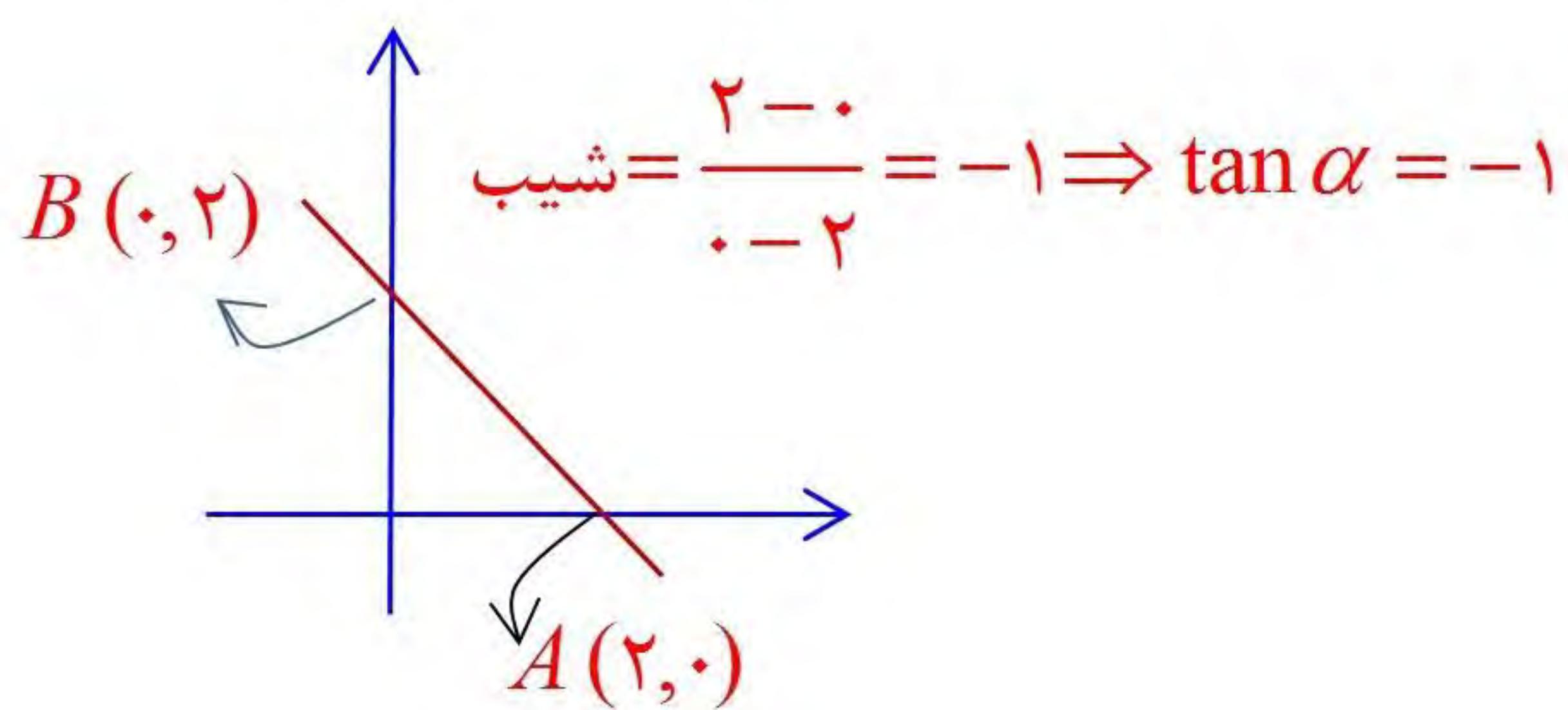
$$\text{شیب خط} = \tan \alpha$$

کار در کلاس

۱ فعالیت بالا را برای خط‌های زیر، تکرار کنید.

ب)  $x+y=2$

الف)  $2y-3x=5$



$$\text{شیب} = \frac{4-1}{1-(-1)} = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{2}$$

۲ معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور x ها  $30^\circ$  است و از نقطه  $(1,0)$  می‌گذرد.

$$m = \tan 30^\circ \Rightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

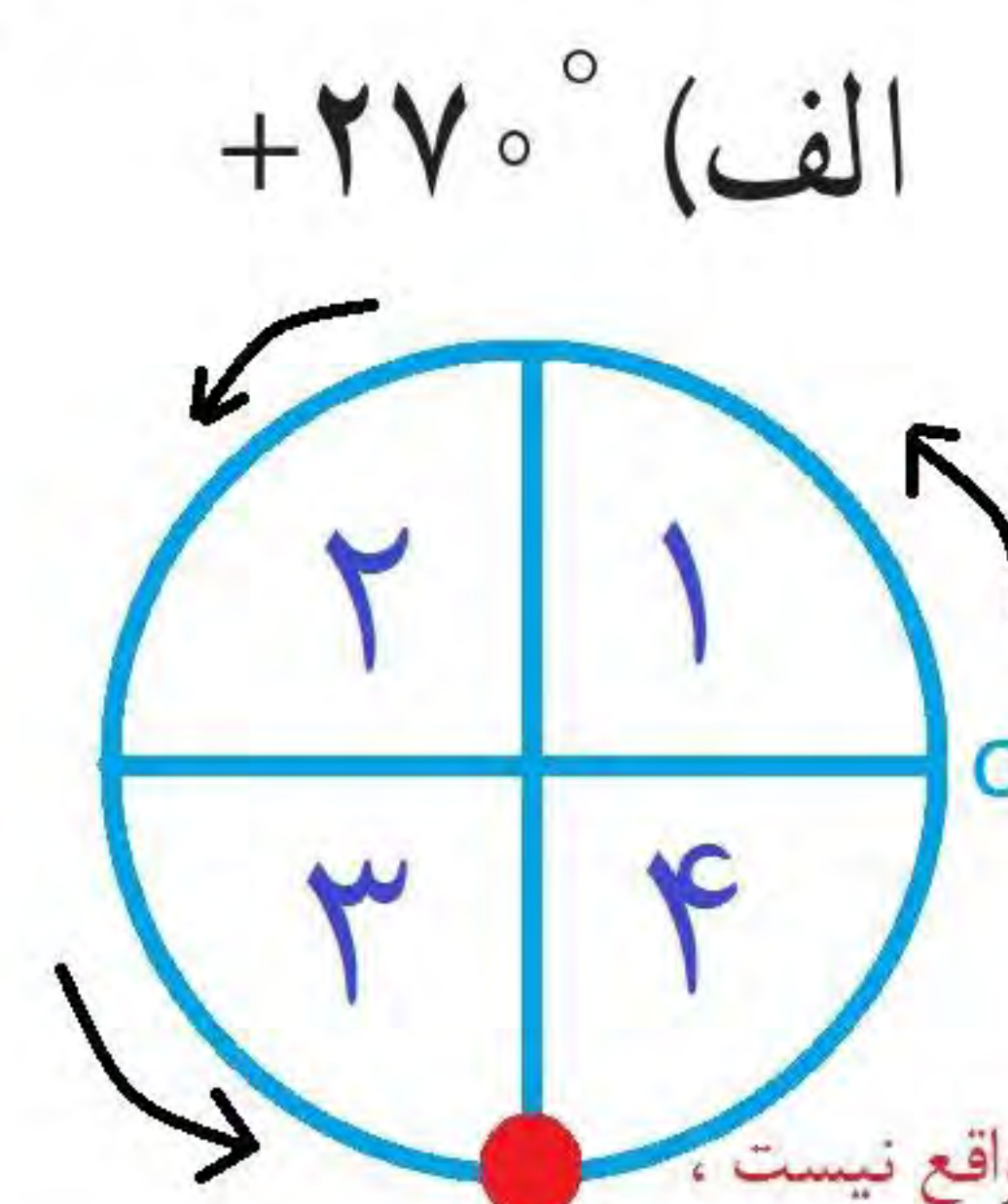
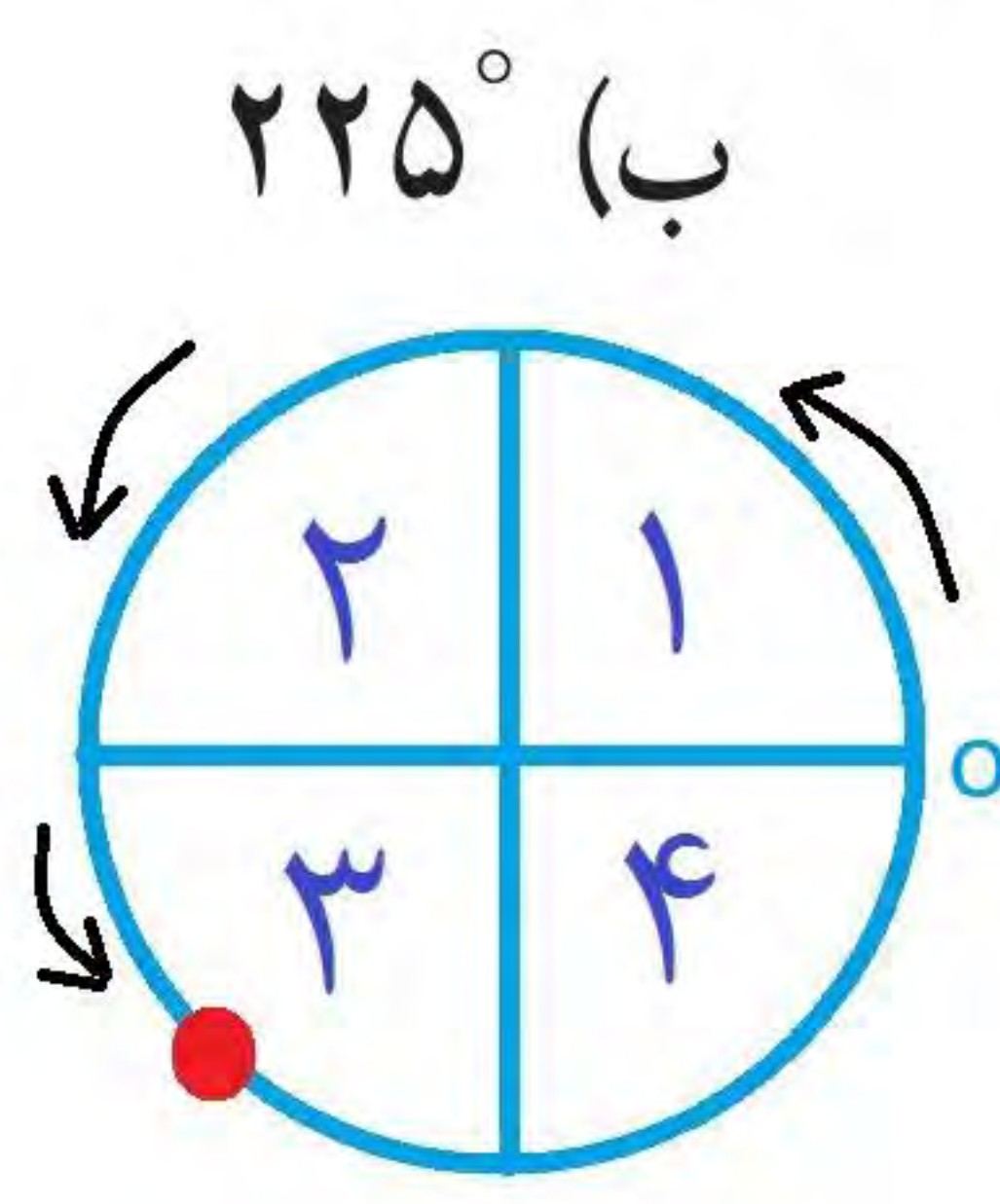
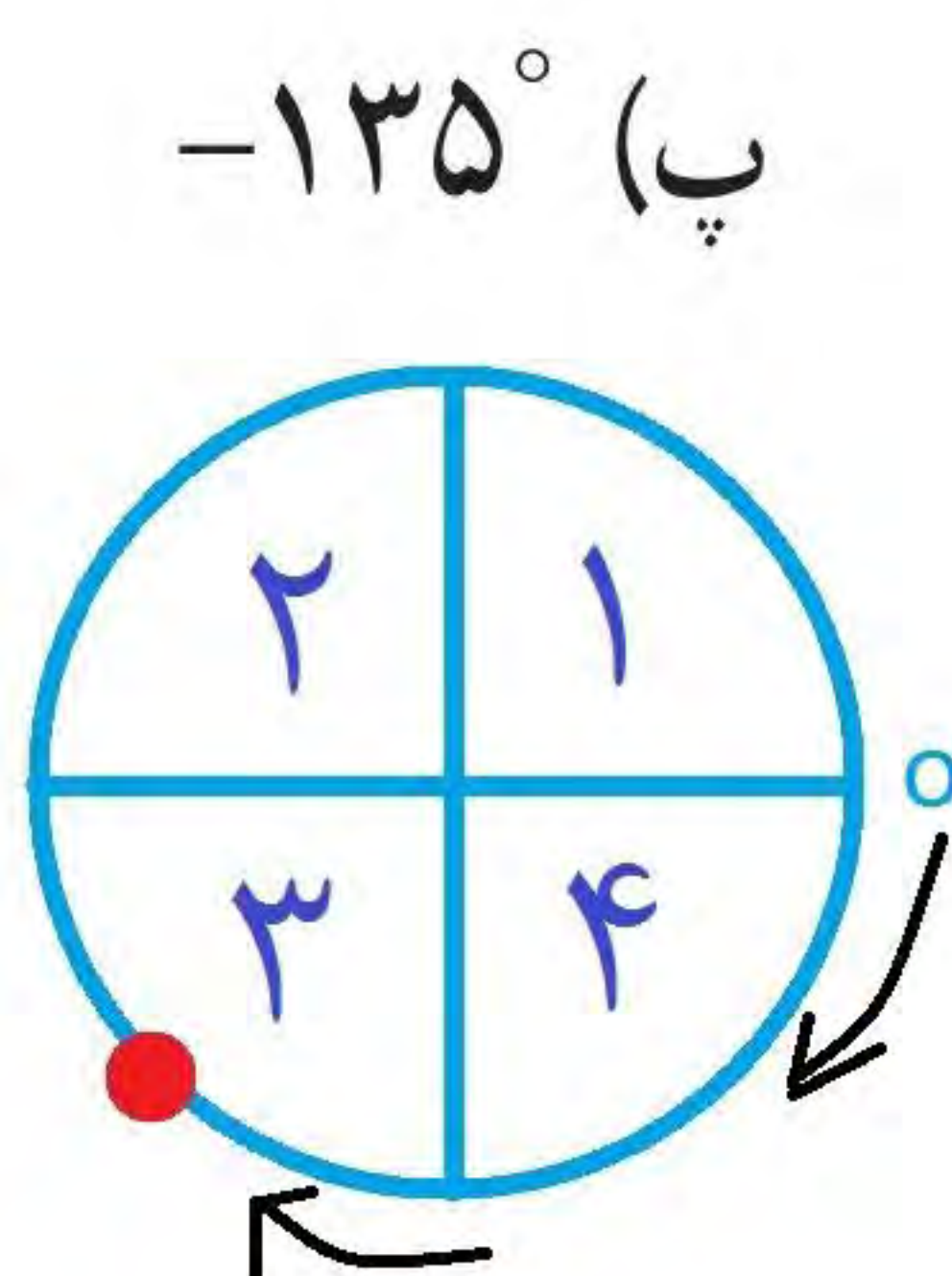
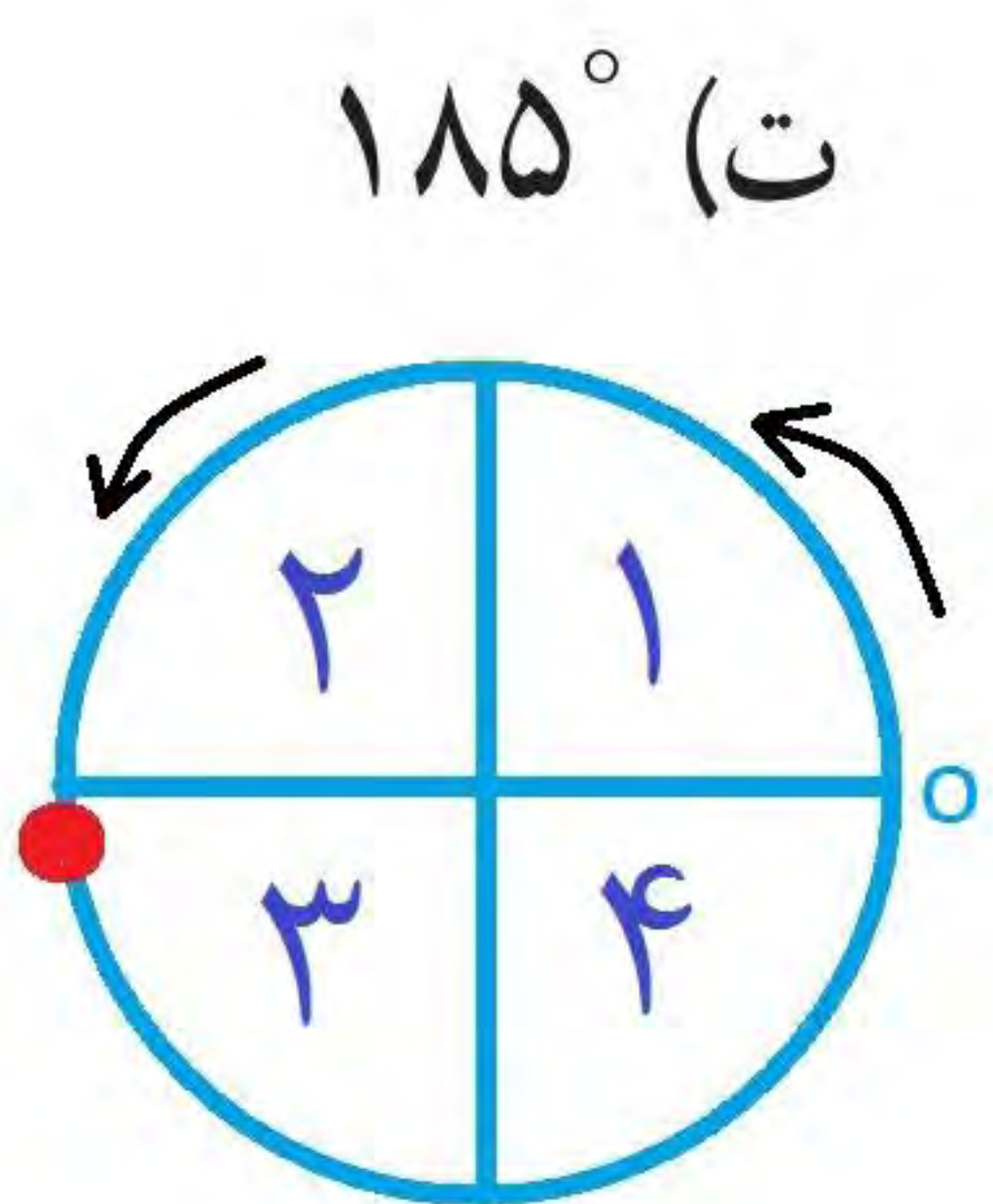
$$\Rightarrow y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

نکته: اگر خطی با شیب  $m$  از نقطه  $(x_0, y_0)$  بگذرد معادله‌ی آن  $y - y_0 = m(x - x_0)$  است.

تمرین

۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.



در هیچ کدام از نواحی واقع نیست، بلکه در مرز دو ناحیه  $3^\circ$  و  $4^\circ$  قرار دارد.



۲ در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.

الف)  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  (در ربع چهارم) همچون مثال صفحه ی ۳۹ عمل می کنیم :

$$x = \frac{3}{5} \xrightarrow{x^2 + y^2 = 1} \frac{9}{25} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow y = -\frac{4}{5} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{4}{5}, \tan \alpha = -\frac{4}{3}$$

ب)  $\sin \beta = \frac{-1}{2}$  (در ربع سوم)

$$y = -\frac{1}{2} \xrightarrow{x^2 + y^2 = 1} x^2 + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

۳ اگر  $\sin \theta$  و  $\tan \theta$  هم علامت باشند، آنگاه  $\theta$  در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

در صورتی که هر دو مثبت باشند، در ربع اول، اما اگر هر دو منفی باشند در ربع چهارم

۴ حدود زاویه  $\theta$  را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

الف)  $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$  ربع اول ب)  $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$  ربع چهارم

۵ اگر  $\sin \alpha \times \cos \alpha < 0$ ، آنگاه  $\alpha$  در کدام یک از نواحی چهارگانه می تواند قرار بگیرد؟

چرا؟ ضرب آنها منفی شده است، پس دو حالت داریم :

اگر سینوس مثبت و کسینوس منفی باشد، جواب ربع دوم است.

اما در صورتی که سینوس منفی و کسینوس مثبت باشد، جواب ربع چهارم است.

۶ زاویه‌ای مثل  $\alpha$  پیدا کنید به طوری که  $\tan \alpha > \cot \alpha$ . اکنون زاویه‌ای مثل  $\beta$  پیدا کنید،

به طوری که  $\cot \beta > \tan \beta$ . از این تمرین چه نتیجه‌ای می گیرید؟

در ربع اول اگر زاویه بیشتر از  $45^\circ$  درجه باشد، تانژانت آن بیشتر از کتانژانت آن است. و اگر کمتر باشد، برعکس است.

$$\alpha = 60^\circ \Rightarrow \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan 60^\circ > \cot 60^\circ$$

$$\beta = 30^\circ \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cot 30^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow \cot 30^\circ > \tan 30^\circ$$

۷ معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور x ها  $45^\circ$  است و نقطه  $(2, 0)$  روی آن قرار

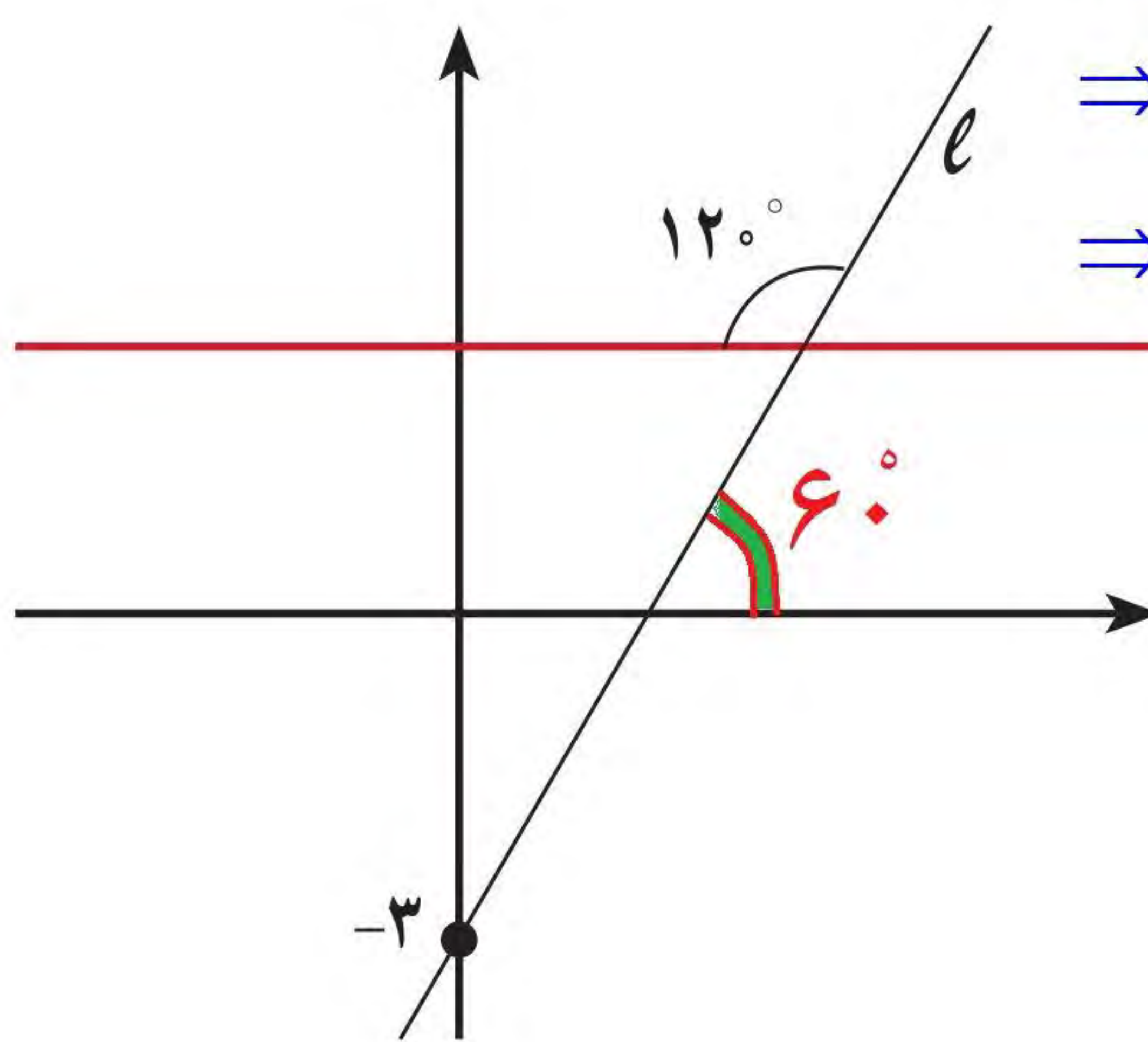
دارد.  $m = \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow y - 0 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 2$

۸ با توجه به شکل زیر، معادله خط  $\ell$  را به دست آورید.

$$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \quad (0, -3)$$

$$\Rightarrow y - (-3) = \sqrt{3}(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{3}x - 3$$



در اخترشناسی، اغلب به مسئله‌هایی برمی‌خوریم که برای حل آنها به مثلثات نیازمندیم. ساده‌ترین این مسئله‌ها، پیدا کردن یک کمان دایره بر حسب درجه است. می‌توان دید، سینوس یک کمان از لحاظ قدرمطلق برابر با نصف طول وتر به اندازه دو برابر آن کمان است. همین تعریف ساده، اساس رابطه بین کمان‌ها و وترها را در دایره تشکیل می‌دهد و مثلثات هم از همین جا شروع شد. کهن‌ترین جدولی که به ما رسیده است و در آن طول وترهای برخی کمان‌ها داده شده است متعلق به هیپارک، اخترشناس سده دوم میلادی است و شاید بتوان تنظیم این جدول را نخستین گام در راه پیدایش مثلثات دانست. همه کارهای ریاضی‌دانان و اخترشناسان یونانی در درون هندسه انجام گرفت و هرگز به مفهوم‌های اصلی مثلثات نرسیدند. خوارزمی نخستین جدول‌های سینوسی را تنظیم کرد و پس از او همه ریاضی‌دانان ایرانی گام‌هایی در جهت تکمیل این جدول‌ها و گسترش مفهوم‌های مثلثاتی برداشتند. مروزی جدول سینوس‌ها را تقریباً  $30^\circ$  درجه به  $3^\circ$  درجه تنظیم کرد و برای نخستین بار به دلیل نیازهای اخترشناسی مفهوم تانژانت را تعریف کرد. جدی‌ترین تلاش‌ها به وسیله ابوریحان بیرونی و ابوالوفای بوزجانی انجام گرفت و سرانجام خواجه نصیرالدین طوسی با جمع‌بندی کارهای دانشمندان ایرانی پیش از خود، نخستین کتاب مستقل مثلثات را نوشت. بعد از طوسی، جمشید کاشانی ریاضی‌دان ایرانی با استفاده از روش زیبایی که برای حل معادله درجه سوم پیدا کرده بود، توانست راهی را برای محاسبه سینوس کمان یک درجه، با هر دقت دلخواه پیدا کند. پیشرفت بعدی دانش مثلثات از سده پانزدهم میلادی و در اروپای غربی انجام گرفت.



تهیه کنندگان:

جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

## درس سوم: روابط بین نسبت های مثلثاتی

در درس های قبل با نسبت های مثلثاتی و دایره مثلثاتی آشنا شدید. در این درس روابطی بین این نسبت ها و کاربردهایی از آنها را بیان می کنیم.

## فعالیت

مثلث قائم الزاویه ABC را در نظر بگیرید.

**الف** اندازه وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویه  $\theta$  و  $\alpha$  به دست آورید.

$$\sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4}$$

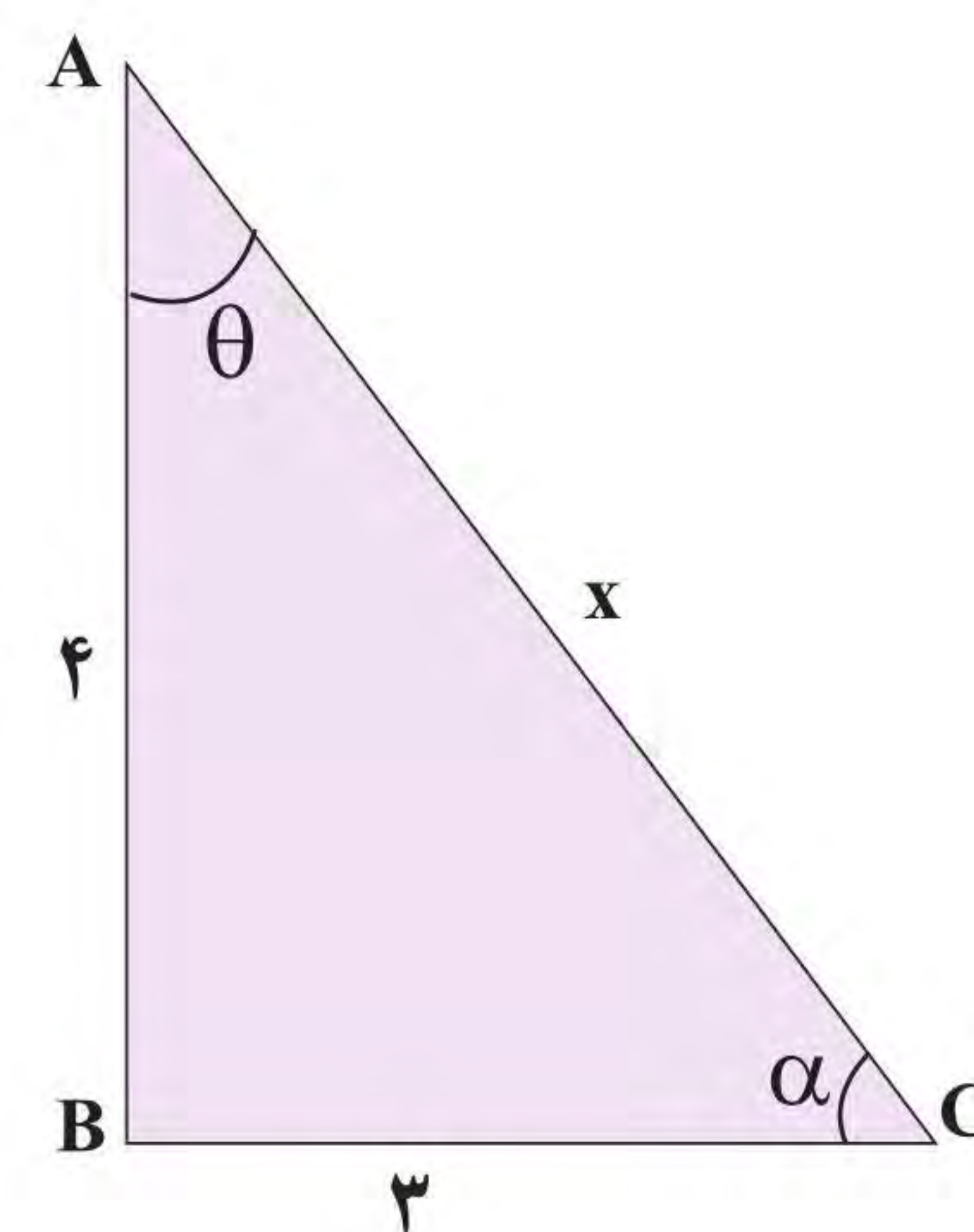
$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{4}{3}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{3}{4}$$



**ب** با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف) مقدار  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$  و  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$  را به دست آورید.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \text{و} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin \theta \times \sin \theta = (\sin \theta)^2 = \sin^2 \theta$$

**پ** درستی رابطه  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

**ت** مشابه قسمت (پ) درستی رابطه  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  را بررسی کنید.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$



اگر  $\alpha$  زاویه دلخواهی باشد، همواره داریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

## کار در کلاس

با توجه به رابطه بالا، یعنی  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  جاهای خالی را پر کنید:

الف)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

ب)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

تذکر: در رابطه‌هایی که به دست آوردید، علامت نسبت مثلثاتی زاویه  $\alpha$  با توجه به ناحیه‌ای که زاویه  $\alpha$  در آن قرار دارد، تعیین می‌شود.

## مثال

اگر  $\alpha$  زاویه‌ای در ناحیه سوم مثلثاتی باشد و  $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ، آنگاه مقدار  $\tan \alpha$ ،  $\cos \alpha$  و  $\cot \alpha$  را به دست آورید.

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه سوم}} \cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

## کار در کلاس

## رابطه‌های تانژانت بر حسب کسینوس و کتانژانت بر حسب سینوس

در این قسمت رابطه‌ای برای تانژانت بر حسب کسینوس یک زاویه و همچنین رابطه‌ای برای کتانژانت بر حسب سینوس، به دست می‌آوریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0)$$



۳ اگر  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  و  $\tan \alpha = \frac{-3}{4}$ ، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

### اتحاد مثلثاتی

هر یک از تساوی‌های  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ،  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  ( $\cos \alpha \neq 0$ )، و

$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$  ( $\sin \alpha \neq 0$ ) را که به ازای هر  $\alpha$  همواره برقرار است، یک اتحاد مثلثاتی می‌نامیم.

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم بین دو عبارت مثلثاتی یک تساوی (اتحاد) برقرار است، می‌توانیم یک طرف تساوی را بنویسیم و با توجه به روابط بین نسبت‌های مثلثاتی به طرف دیگر برسیم. به مثال زیر توجه کنید:

### مثال

درستی اتحاد مثلثاتی زیر را بررسی کنید.

$$\left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta\right)(1 - \sin \theta) = \cos \theta$$

$$(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{طرف چپ} &= \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta\right)(1 - \sin \theta) = \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)(1 - \sin \theta) \\ &= \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}\right)(1 - \sin \theta) = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} = \cos \theta = \text{طرف راست} \end{aligned}$$

### کار در کلاس

۱ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید:

الف)  $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$

$$\text{طرف چپ} = \sin^4 \theta - \cos^4 \theta \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \times (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \times 1 = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$$



ساعت آفتابی وسیله‌ای است که زمان را با استفاده از مکان خورشید در آسمان می‌سنجد و از میله‌ای ساخته شده است که روی صفحه‌ای قرار دارد و ساعت‌های شبانه‌روز، روی صفحه نشانه‌گذاری شده‌اند. وقتی مکان خورشید در آسمان عوض می‌شود، مکان سایه میله هم روی صفحه جابه‌جا می‌شود و ساعت را نشان می‌دهد.



$$\text{ب) } \frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\text{طرف راست} = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \cot \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha$$

۲ کدام یک از تساوی های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

الف)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$   $\alpha = 30^\circ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = 1 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$  تساوی صحیح نیست

ب)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$   $\alpha = 30^\circ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = 1 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = 1 - \frac{6}{16} \Rightarrow$  تساوی صحیح است  
حال باید درستی آن را در حالت کلی اثبات نماییم:

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

۳ با ضرب کردن طرفین اتحاد مثلثاتی  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  در  $\cot \alpha$  یک اتحاد مثلثاتی بسازید.

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \xrightarrow{\times \cot \alpha} \cot \alpha + \cot \alpha \tan^2 \alpha = \cot \alpha \times \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cot \alpha + \underbrace{\cot \alpha \tan \alpha}_{1} \tan \alpha = \frac{\cot \alpha}{\sin \alpha} \times \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \boxed{\cot \alpha + \tan \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}}$$

### تمرین

۱ فرض کنید  $\alpha$  زاویه ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ . نسبت های دیگر مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5} \quad \text{و} \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{5} \div \frac{-3}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{-5}{3} = -\frac{4}{3}$$

۲ اگر  $\tan \alpha = \frac{-4}{3}$  و  $\alpha$  زاویه ای در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، نسبت های دیگر مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \quad \text{و} \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha = \frac{-4}{3} \times \frac{3}{5} = -\frac{4}{5}$$

۳ اگر  $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آنگاه نسبت های دیگر مثلثاتی زاویه  $135^\circ$  را به دست آورید.

$$\cos^2 135^\circ = 1 - \sin^2 135^\circ = 1 - \frac{2}{4} = \frac{2}{4} \Rightarrow \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad \tan 135^\circ = \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

۴ اگر  $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت های دیگر مثلثاتی زاویه  $24^\circ$  را به دست آورید.

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha = \sqrt{3} \times \frac{-1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۵ شخصی می خواهد عرض یک رودخانه را اندازه گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه ای چون C و سپس نقطه ای مانند A را در امتداد

C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می کند و به اندازه  $20^\circ$  متر از C به صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می کند تا به نقطه B برسد. اگر

زاویه دید این شخص (از نقطه B به نقطه A)،  $20^\circ$  باشد و  $\sin 20^\circ \approx 0.34$ ، او چگونه می تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را

تا دو رقم اعشار بر حسب متر بنویسید.)

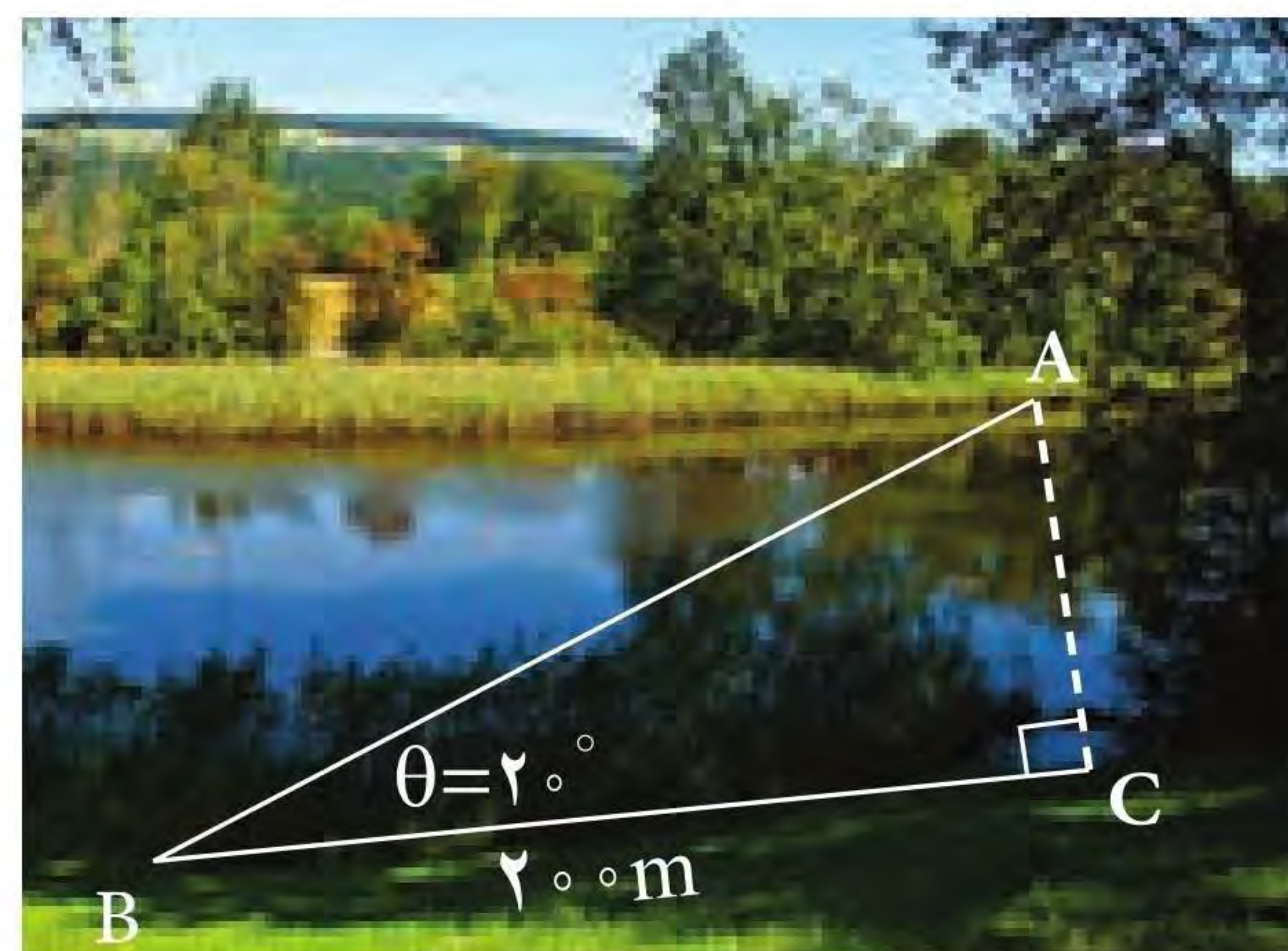
$$\cos^2 20^\circ = 1 - \sin^2 20^\circ = 1 - 0.1156 = 0.8844 \Rightarrow \cos 20^\circ = 0.9404$$

$$\tan 20^\circ = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{0.34}{0.9404} = 0.3615$$

$$\tan 20^\circ = \frac{AC}{BC} \Rightarrow 0.3615 = \frac{AC}{20} \Rightarrow AC = 7.23$$

البته روش های متفاوتی برای حل این سوال وجود دارد. و ممکن است

جواب های بدست آمده با توجه به میزان دقت، با هم تفاوت داشته باشند.





۶ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

$$\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad (\text{الف})$$

$$\text{چپ} = \frac{1}{\cancel{\sin \theta}} \times \frac{\cancel{\sin \theta}}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \quad (\text{ب})$$

$$\text{چپ} = \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \times \frac{1 - \sin \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{\cos \theta (1 - \sin \theta)}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\cancel{\cos \theta} (1 - \sin \theta)}{\cos^2 \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha \quad (\text{پ})$$

$$\text{چپ} = \frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \frac{1 + \tan \alpha}{1 + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan \alpha (1 + \tan \alpha)}{\tan \alpha + 1} = \tan \alpha$$

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x \quad (\text{ت})$$

$$\text{چپ} = 1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = 1 - 1 + \sin x = \sin x$$

$$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \quad (\text{ث})$$

$$\text{چپ} = \frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{\cancel{\cos x}^2 x}{\cancel{\cos x} (1 + \sin x)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$



اولین دانشمندی که جدول سینوس، کسینوس، شعاع دایره‌ای و نسبت مثلثاتی را کشف کرد، ابوالوفا محمد بن یحیی بن اسماعیل بن عباس بوزجانی خراسانی است. وی یکی از مفاخر علمی ایران، ریاضی‌دان و اخترشناس سده چهارم هجری قمری در اول رمضان ۳۲۸ (ه.ق) در بوزجان (تربت جام امروزی)، در مرز خراسان و افغانستان زاده شد. او مقدمات ریاضیات زمان را، همان‌جا، نزد دایی و عمویش فرا گرفت. در سن ۲۰ سالگی به بغداد رفت و نزد اساتید مختلفی به تحصیل خود ادامه داد. وی پس از مدتی به یکی از دانشمندان مشهور زمان خود تبدیل شد و با دانشمندان هم عصر خود، مکاتبات علمی داشت. به عنوان مثال، وقتی ابوریحان در خوارزم بود، برای رصد همزمان گرفتگی ماه، با بوزجانی که در بغداد بود، قرار گذاشتند تا نتیجه دو رصد که در دو نقطه مختلف انجام می‌گرفت را با هم مقایسه کنند. ابوالوفا بر بسیاری از آثار پیشینیان (ایرانی و یونانی) مثل «مقدمات» اقلیدس، «جبر و مقابله» خوارزمی، «جبر» دیوفانت، «مجسطی» بطلمیوس و غیره تفسیر نوشت. خود نیز ابتکارات و نوآوری‌های بسیاری در هندسه و مثلثات دارد. سرانجام وی در سوم رجب ۳۸۸ (ه.ق) در بغداد درگذشت.