

تهیه کنندگان:

جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی



توان‌های گویا و عبارت‌های جبری



پژوهشگاه رویان هشتم خرداد ماه سال ۱۳۷۰ به عنوان مرکز جراحی محدود با هدف ارائه خدمات درمانی به زوج‌های نابارور و پژوهش و آموزش در زمینه علوم باروری و ناباروری توسط زنده یاد دکتر سعید کاظمی آشتیانی و گروهی از پژوهشگران و همکارانش در جهاد دانشگاهی علوم پزشکی ایران تأسیس شد. در حال حاضر این پژوهشگاه فعالیت‌های پژوهشی خود را در سه پژوهشگاه پزشکی تولیدمثل، سلول‌های بنیادی و زیست فناوری دنبال می‌کند و در دو مرکز درمان ناباروری و سلول درمانی نیز به بیماران خدمات ارائه می‌کند.

درس اول ریشه و توان

درس دوم ریشه II ام

درس سوم توان‌های گویا

درس چهارم عبارت‌های جبری



درس اول: ریشه و توان

در سال گذشته با ریشه‌های دوم و سوم عددها آشنا شده‌اید. ریشه و توان رابطه‌ای دو سویه با هم دارند. به عنوان مثال $\sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow 2^3 = 8$ ؛ همچنین $2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$. علامت \Rightarrow به این معنی است که طرف چپ، طرف راست را نتیجه می‌دهد. اگر طرف راست هم طرف چپ را نتیجه دهد، می‌توان هر دو نتیجه را به طور خلاصه با علامت \Leftrightarrow نوشت. بنابراین می‌توانیم بنویسیم $\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8$.

فعالیت

۱ اکنون با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی بنویسید. همچنین نظیر هر تساوی رادیکالی یک تساوی توانی بنویسید؛ مانند نمونه‌ها

$$\begin{array}{ll} (-3)^3 = -27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-27} = -3 & \sqrt{81} = 9 \Leftrightarrow 9^2 = 81 \\ (-5)^3 = -125 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-125} = -5 & \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow (5\sqrt{2})^2 = 50 \\ 2^4 = 16 \Leftrightarrow \sqrt[4]{16} = 2 & \sqrt[3]{-8} = -2 \Leftrightarrow (-2)^3 = -8 \\ 11^2 = 121 \Leftrightarrow \sqrt{121} = 11 & \sqrt{100} = 10 \Leftrightarrow 10^2 = 100 \\ (0.25)^2 = 0.0625 \Leftrightarrow \sqrt{0.0625} = 0.25 & \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow (4\sqrt{3})^2 = 48 \\ (0.5)^2 = 0.25 \Leftrightarrow \sqrt{0.25} = 0.5 & \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow (3\sqrt{5})^2 = 45 \end{array}$$

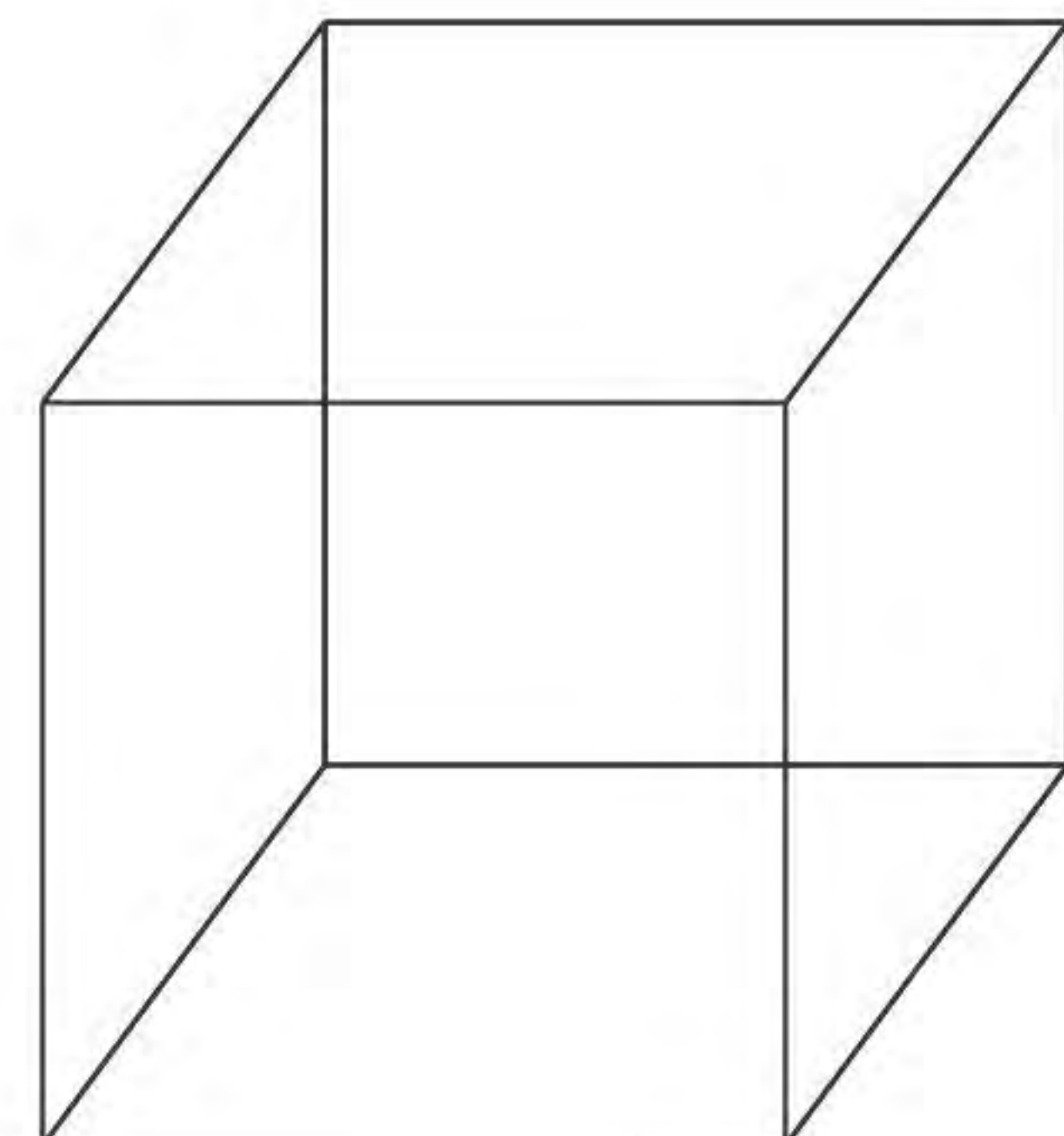
۲ در جدول زیر جاهای خالی را پر کنید.

عدد	۸	۲۷	-۲۷	۱۲۵	-۱۰۰۰	۳۳۷۵	۱۰۰۰	۷۲۹
ریشه سوم	۲	۳	-۳	۵	-۱۰	۱۵	۱۰	۹

کار در کلاس

۱ حجم مخزن آبی که به شکل مکعب است، برابر ۲۵ متر مکعب است. طول ضلع این مکعب را حدس بزنید و حدس خود را آزمایش کنید. می‌دانیم هرگاه طول ضلع مکعب a متر باشد، حجم آن برابر a^3 متر مکعب است. ابتدا جدول را کامل کنید.

طول ضلع	۱	۲	۳	۴	۵	۶
حجم مکعب	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵	۲۱۶



دو دانش‌آموز طول ضلع مکعب را به روش‌های روبه‌رو به دست آورده‌اند:

روش‌های این دو دانش‌آموز را توضیح دهید.

دبیر: ریشه سوم ۲۵ تقریبی به دست می‌آید و می‌توانیم به صورت تقریبی آن را برابر $2/9$ بگیریم.

$$\sqrt[3]{25} \approx 2/9$$

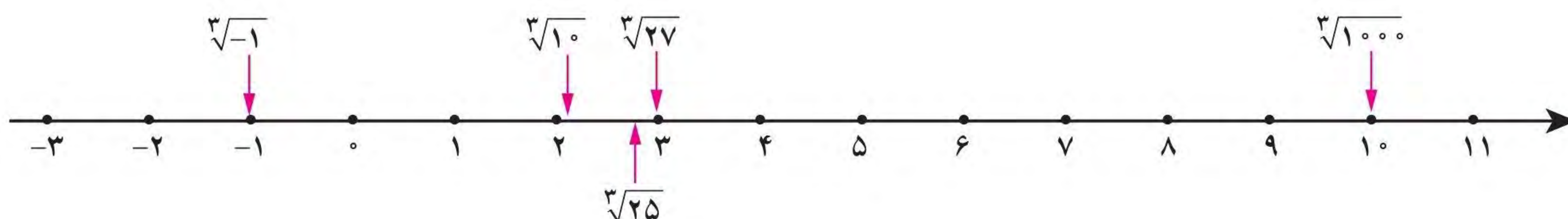
احمد: مقدار دقیق $\sqrt[3]{25}$ چقدر است؟

دبیر: $\sqrt[3]{25}$ یک عدد اعشاری است. اگر ماشین حساب مناسب داشته باشید، می‌توانید مقدار تقریبی دقیق‌تری برای آن به دست آورید، اما هیچ‌گاه مقدار دقیق آن به صورت اعشاری قابل نمایش نیست. به همین علت برای نمایش مقدار دقیق آن از نماد $\sqrt[3]{25}$ استفاده می‌کنیم.

اگر قدرت ماشین حساب شما بیشتر باشد، تعداد ارقام اعشاری بیشتری به دست می‌دهد و عدد دقیق‌تری برای ریشه سوم ۲۵ حاصل می‌شود.

$\sqrt[3]{25}$ برای نمایش مقدار دقیق ریشه سوم ۲۵ به کار می‌رود، اما در کاربردهای دنیای واقعی با مقادیر تقریبی آن مانند $2/9$ ، $2/92$ و $2/924$ کار می‌کنیم.

ریشه عددها را می‌توانیم به طور تقریبی روی محور اعداد نشان دهیم.



۲ مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه کنید و مانند نمونه روی محور اعداد، نشان دهید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

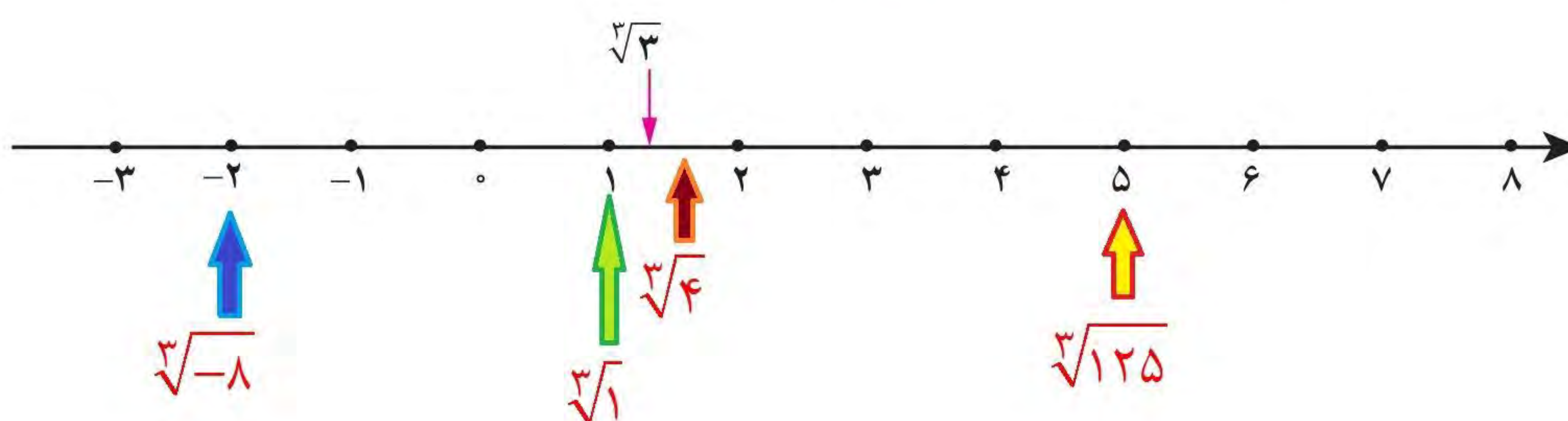
$$\sqrt[3]{1} = 1$$

$$\sqrt[3]{3} \approx 1/4$$

$$\sqrt[3]{4} \approx 1/587$$

$$\sqrt[3]{125} = 5$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$



۳ مانند نمونه با استدلال مشخص کنید که هر ریشه بین کدام دو عدد صحیح متوالی است :

الف) چون $۳۶ < ۳۰ < ۲۵$ پس $۶ < \sqrt{۳۰} < ۵$. همچنین چون $۸ < ۵ < ۱$ پس $۲ < \sqrt[۳]{۵} < ۱$.

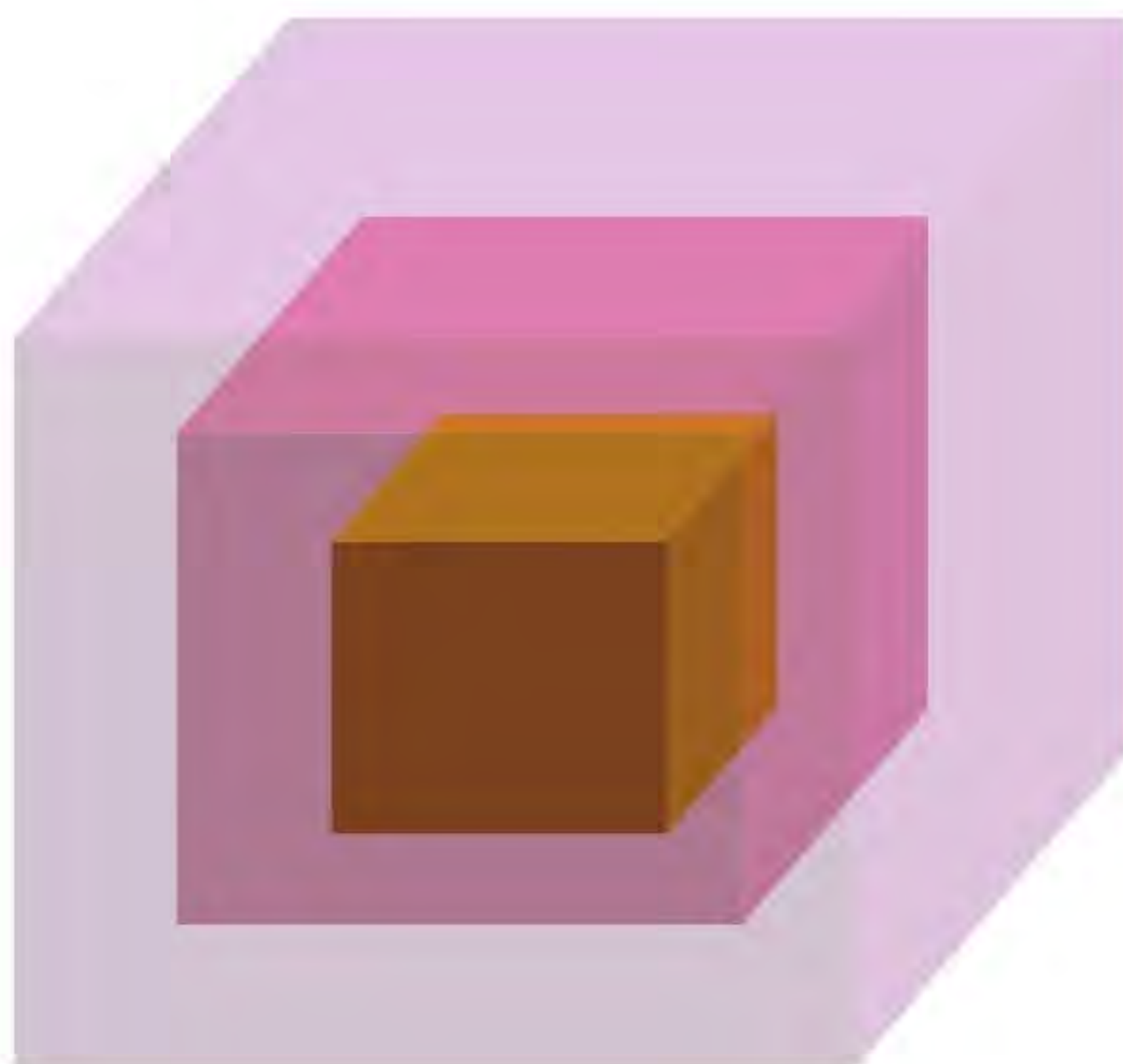
ب) $۴ < ۷ < ۹ \Rightarrow \boxed{۲} < \sqrt{۷} < \boxed{۳}$ پ) $۹ < ۱۰ < ۱۶ \Rightarrow \boxed{۳} < \sqrt{۱۰} < \boxed{۴}$

ت) $-۲۷ < -۱۷ < -۸ \Rightarrow \boxed{-۳} < \sqrt[۳]{-۱۷} < \boxed{-۲}$ ث) $۸ < ۲۰ < ۲۷ \Rightarrow \boxed{۲} < \sqrt[۳]{۲۰} < \boxed{۳}$

۴ زیر رادیکال (جای خالی) عدد یا عددهایی بگذارید که نامساوی‌ها برقرار باشند.

الف) $۴ < \sqrt{\quad} < ۵$ ← زیر رادیکال می‌توان تمام اعداد
↓ به توان ۲ بزرگتر از ۱۶ و کوچکتر از ۲۵ را نوشت
۱۶ ۲۵

ب) $۹ < \sqrt[۳]{\quad} < ۱۰$ ← زیر رادیکال می‌توان تمام اعداد
↓ به توان ۳ بزرگتر از ۷۲۹ و کوچکتر از ۱۰۰۰ را نوشت
۷۲۹ ۱۰۰۰



۵ سه مکعب تو در تو مانند شکل مقابل واقع شده‌اند. حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۶۴ و حجم مکعب داخلی (کوچک) ۲۷ است. طول ضلع مکعب میانی چه عددهایی می‌تواند باشد؟ (حداقل سه پاسخ متفاوت ارائه کنید.)

طول ضلع مکعب بیرونی ۴ و طول ضلع مکعب داخلی ۳ می‌باشد. بنابراین طول ضلع مکعب میانی می‌تواند هر یک از اعداد بین ۳ و ۴ باشد. به طور مثال می‌تواند ۳٫۱ یا ۳٫۵ یا ۳٫۹ باشد.

فعالیت

۱ مانند ریشه‌های دوم و سوم می‌توان ریشه چهارم را تعریف کرد. با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی داریم :

$$\begin{array}{lcl} ۲^۴=۱۶ & \Rightarrow & \text{ریشه‌های چهارم} \\ (-۲)^۴=۱۶ & & ۱۶ \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow ۲ \\ \searrow -۲ \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} ۵^۴=۶۲۵ & \Rightarrow & \text{ریشه‌های چهارم} \\ (-۵)^۴=۶۲۵ & & ۶۲۵ \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow ۵ \\ \searrow -۵ \end{array}$$

$\sqrt[۴]{۶۲۵}$ عددی مثبت و برابر است با ریشه چهارم مثبت عدد ۶۲۵؛ یعنی $\sqrt[۴]{۶۲۵}=۵$. همچنین $-\sqrt[۴]{۶۲۵}$ عددی منفی است و برابر است با ریشه چهارم منفی عدد ۶۲۵؛ یعنی $-\sqrt[۴]{۶۲۵}=-۵$.

آیا -۱۶ ریشه چهارم دارد؟ **خیر** آیا عددی منفی یا مثبت وجود دارد که وقتی به توان ۴ برسد، برابر -۱۶ شود؟ **خیر** اکنون عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت دارای ... **دو** ... ریشه چهارم است که **قربینه‌ی** یکدیگرند.
عددهای منفی ریشه چهارم ندارند.

صفر فقط یک ریشه‌ی چهارم دارد و آن هم خود صفر می‌باشد.

۱ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید. آخرین ستون را به دلخواه کامل کنید.

عدد	۱۶		۶۲۵		۱۰,۰۰۰		۳۱۲۵		۸۱	
ریشه‌های چهارم	۲	-۲	۵	-۵	۱۰۰	-۱۰۰	$5\sqrt[4]{5}$	$-5\sqrt[4]{5}$	۳	-۳

۲ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد	-۳۲	۳۱۲۵	۷۱	-۲۴۳	-۱	-۱۰۰۰۰۰	۱۹	۱۰۲۴
ریشه پنجم	-۲	۵	$\sqrt[5]{71}$	-۳	-۱	-۱۰	$\sqrt[5]{19}$	۴

۳ ریشه پنجم چه عددی با خودشان برابر است؟ $(۱ و ۰ و -۱)$

۴ محاسبه کنید.

$$\sqrt[5]{\frac{1}{100000}} = \frac{1}{10}$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

$$\sqrt[5]{-0.00032} = -0.2$$

۵ عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت یا منفی دارای **یک** ریشه پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشه پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشه پنجم آن **منفی** است.

تمرین

۱ برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$$\sqrt{16} = 4$$

$$4 < \sqrt{20} < 5$$

$$-6 < -\sqrt{35} < -5$$

$$8 < \sqrt{75} < 9$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

$$2 < \sqrt[3]{20} < 3$$

$$-5 < \sqrt[3]{-90} < -4$$

$$6 < \sqrt[3]{250} < 7$$

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

$$-3 < -\sqrt[4]{20} < -2$$

$$-4 < -\sqrt[4]{120} < -3$$

$$4 < \sqrt[4]{400} < 5$$

$$\sqrt[5]{1} = 1$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

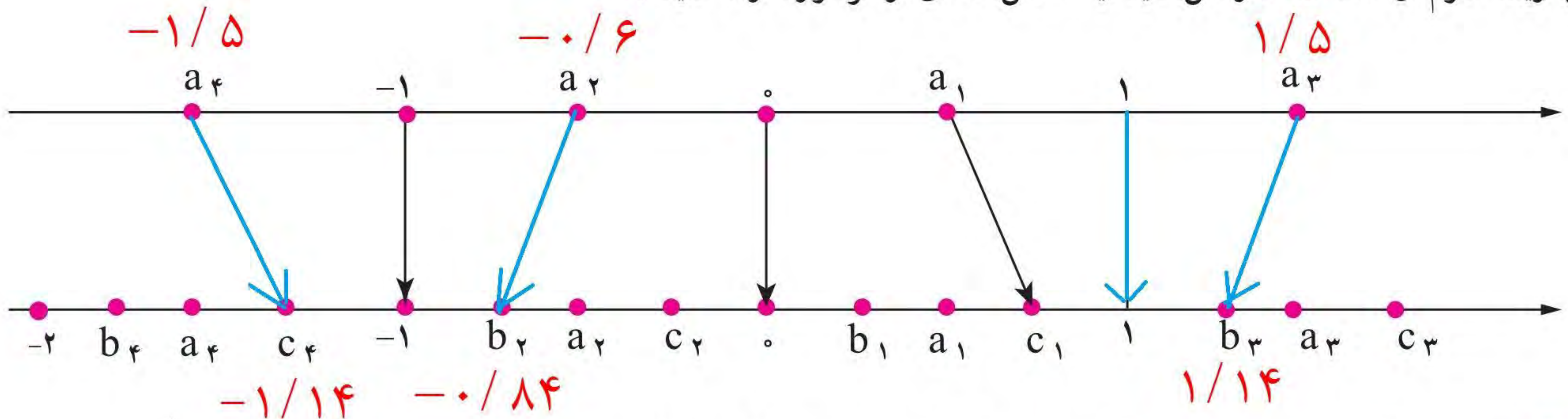
$$3 < \sqrt[5]{400} < 4$$

۲ مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$$\sqrt{10} = 3/1 \quad \sqrt[3]{25} = 2/9 \quad \sqrt[3]{7/25} = 1/9$$

$$\sqrt[5]{16} = 1/7 \quad \sqrt[5]{64} = 2/2 \quad \sqrt[4]{90} = 3/0$$

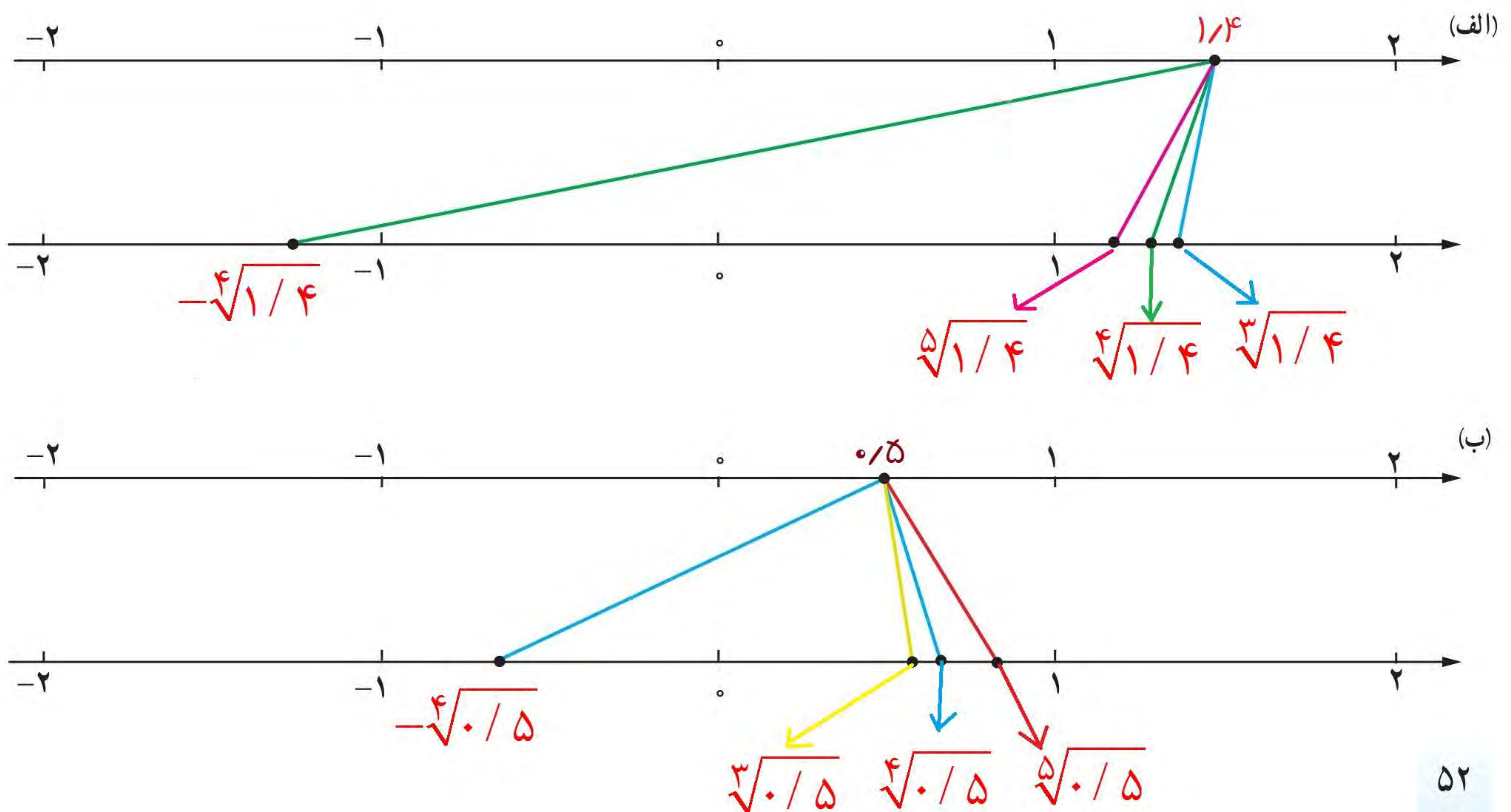
۳ مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از اعداد مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید).

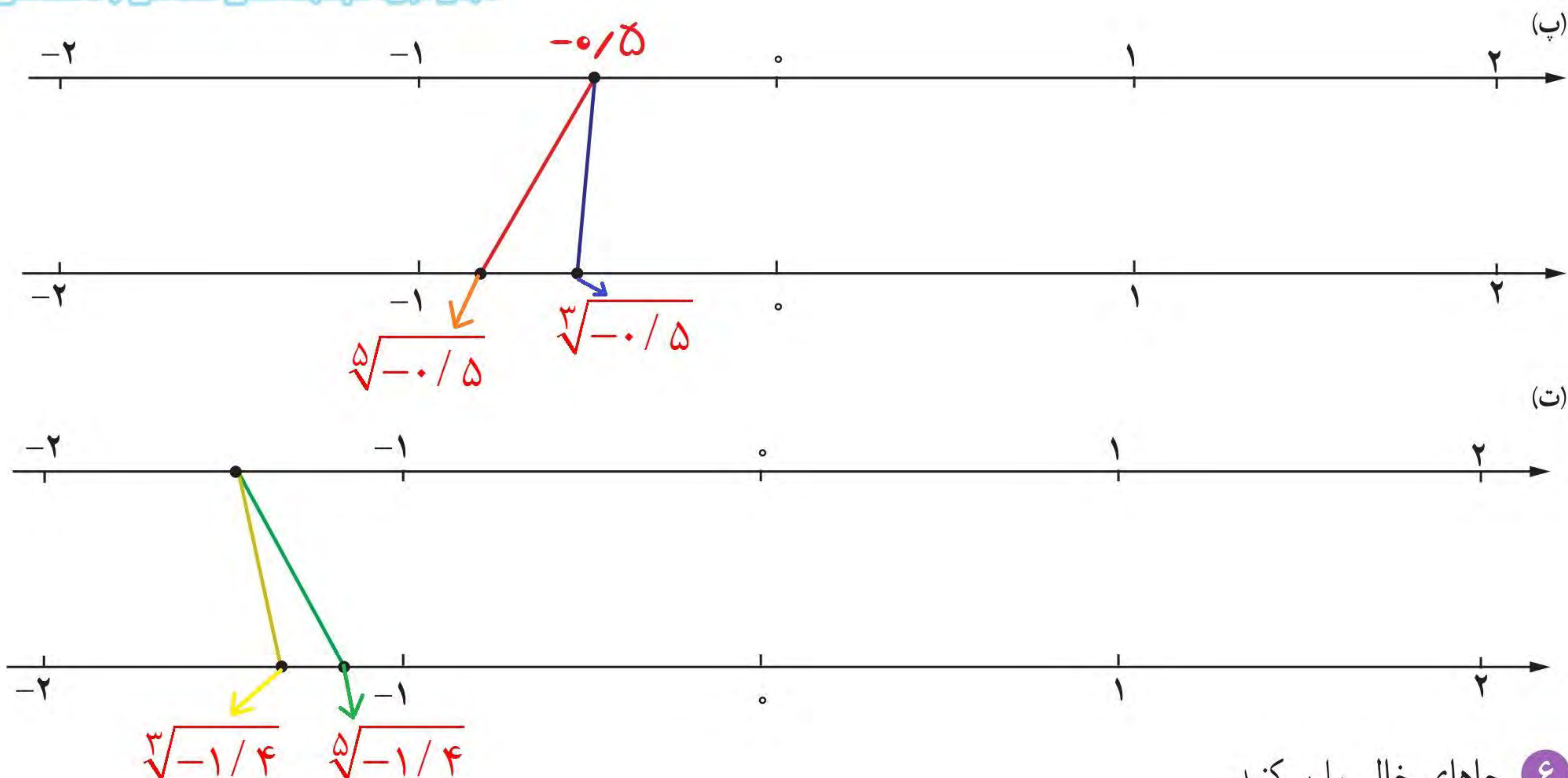


۴ با توجه به آنچه درباره ریشه سوم اعداد درک کرده‌اید، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

- (الف) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} > a$. چه عددی می‌تواند باشد؟ می‌تواند هر عددی بین صفر و یک باشد.
- (ب) a عددی است که ریشه سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی $\sqrt[3]{a} = a$. چه اعدادی می‌تواند باشد؟ (یا صفر یا -)
- (پ) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} < a$. چه اعدادی می‌تواند باشد؟ حتماً عددی بزرگتر از یک خواهد بود.
- (ت) به موارد (الف) و (پ) برای حالتی که a عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.
- در حالت الف: حتماً آن عدد کمتر از -۱ است. در حالت پ: حتماً آن عدد بین -۱ و صفر است.

۵ در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.





۶ جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۳ و $\sqrt[3]{-3}$... ریشه‌های چهارم عدد $(-1)^{1/4}$... می‌باشند.

ب) اگر $a = \sqrt[4]{16}$ باشد، در این صورت حاصل عبارت $a^3 + 5$ را بیابید. $a = 2 \Rightarrow a^3 + 5 = 8 + 5 = 13$

۷ می‌دانیم $\sqrt[5]{161051} = 11$ ، $\sqrt[5]{170000}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟ **پین دو عدد ۱۱ و ۱۲ واقع است.**

۸ در جاهای خالی یکی از علامت‌های «>»، «<» یا «=» را قرار دهید.

$$(-0.1)^5 > (-0.1)^3$$

$$(0.1)^5 < (0.1)^3$$

$$2^5 > 2^2$$

$$(-2)^5 < (-2)^4$$

$$(-2)^5 < (-2)^3$$

$$\sqrt[5]{0.00001} = 0.1$$

۹ قرار دهید $\sqrt[5]{a} = \square$. اکنون با توجه به تعریف مشخص کنید \square^5 برابر چه عددی است؟ **a** بنابراین داریم $(\sqrt[5]{a})^5 = a$. دربارهٔ

$(\sqrt[4]{a})^4$ چه می‌توان گفت؟ **برابر a است.**

خواندنی



سلول، واحد تشکیل دهنده بافت‌های بدن است. هر بافت سلول‌های ویژه خود را دارد که در صورت تکثیر، فقط می‌تواند به سلول‌های همان بافت تبدیل شود، ولی سلول بنیادی مادر تمام سلول‌ها است و توانایی تبدیل شدن به تمام سلول‌های بدن را دارد. دانشمندان می‌گویند این سلول‌ها می‌توانند امکان معالجه بیماری‌هایی را فراهم آورند که در حال حاضر فقط درمان‌های محدودی برای آنها وجود دارد. به دلیل توانایی منحصر به فرد سلول‌های بنیادی، پژوهش در مورد آنها امروزه از مباحث جذاب در زیست‌شناسی و پزشکی است. این سلول‌ها همچنین قدرت تکثیر فراوانی دارند و سلامت آنها سبب سلامت بدن می‌شود. پیشرفت در زمینه سلول‌های بنیادی تنها متکی بر علم پزشکی نخواهد بود، بلکه کمک علوم دیگری مانند پلیمر، شیمی، فیزیک و ریاضی هم لازم خواهد بود. دانشمندان ایرانی در زمینه سلول‌های بنیادی پیشرفت‌های چشمگیری داشته‌اند. ایران در زمینه فناوری و تحقیقات سلول‌های بنیادی یکی از ۱۰ کشور برتر جهان محسوب می‌شود.

درس دوم: ریشه n ام

فعالیت

۱. مشابه آنچه که برای ریشه‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم گفته شد، می‌توان برای ریشه‌های دیگر مثلاً ریشه ششم نیز عمل کرد. جدول زیر را که مربوط به ریشه‌های مختلف عدد ۶۴ است، کامل کنید.

ریشه‌های دوم	ریشه سوم	ریشه‌های چهارم	ریشه پنجم	ریشه‌های ششم	ریشه هفتم	ریشه‌های هشتم
$\sqrt{64} = 8$ و $-\sqrt{64} = -8$	$\sqrt[3]{64}$	$\sqrt[4]{64}$ و $-\sqrt[4]{64}$	$\sqrt[5]{64}$	$-\sqrt[6]{64}$ و $\sqrt[6]{64}$	$\sqrt[7]{64}$	$-\sqrt[8]{64}$ و $\sqrt[8]{64}$

ریشه‌های ششم عدد ۶۴ اعداد $\sqrt[6]{64}$ و $-\sqrt[6]{64}$ یا همان 2 و -2 هستند؛ زیرا $2^6 = 64$ و $(-2)^6 = 64$.

درباره ریشه‌های هفتم و هشتم عدد ۶۴ چه می‌توانید بگویید؟ **دارای یک ریشه ی هفتم و دو ریشه ی هشتم است.**

به طور کلی اگر $n \in \mathbb{N}$ ، درباره ریشه n ام عدد ۶۴ چه می‌توان گفت؟

اگر n فرد باشد دارای یک ریشه ی مثبت است و در صورتی که n زوج باشد دارای دو ریشه ی مثبت و منفی است که با هم قرینه اند.

در حالت کلی تر اگر a یک عدد مثبت باشد و $n \in \mathbb{N}$ ، درباره تعداد ریشه‌های n ام a چه می‌توان گفت؟ **دقیقاً همچون عدد ۶۴ گوییم؛**

اگر n فرد باشد دارای یک ریشه ی مثبت است و در صورتی که n زوج باشد دارای دو ریشه ی مثبت و منفی است که با هم قرینه اند.

۲. جدول زیر را که درباره ریشه‌های مختلف عدد -64 است، تکمیل کنید.

ریشه‌های دوم	ریشه سوم	ریشه‌های چهارم	ریشه پنجم	ریشه‌های ششم	ریشه هفتم	ریشه‌های هشتم
وجود ندارد	$\sqrt[3]{-64} = -4$	وجود ندارد	$\sqrt[5]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[7]{-64}$	وجود ندارد

ریشه‌های زوج -64 وجود ندارند؛ زیرا عددی وجود ندارد که به توان **عددی زوج** برسد و مساوی -64 شود.

درباره ریشه‌های n ام -64 ($n \in \mathbb{N}$) بحث کنید. **اگر n فرد باشد، یک ریشه منفی دارد و در صورتی که n زوج باشد، تعریف نشده است.**

اگر a یک عدد منفی و $n \in \mathbb{N}$ باشد، درباره ریشه n ام a چه می‌توان گفت؟ **دقیقاً همچون عدد -64 گوییم؛**

اگر n فرد باشد، یک ریشه منفی دارد و در صورتی که n زوج باشد، تعریف نشده است.

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه n ام عدد a می‌نامیم. هرگاه $b^n = a$

۲ جدول زیر را کامل کنید.

$a > 0$	n زوج	a دارای دو ریشه n ام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است	$a = 81$ $n = 4$	81 دارای دو ریشه چهارم $\sqrt[4]{81} = 3$ و $-\sqrt[4]{81} = -3$ است
	n فرد	a دارای یک ریشه ی n ام $\sqrt[n]{a}$ است.	$a = 27$ $n = 3$	27 دارای یک ریشه ی سوم $\sqrt[3]{27} = 3$ است.
$a < 0$	n زوج	ریشه n ام وجود ندارد	$a = -1$ $n = 2$	برای (-) ریشه ی دوم وجود ندارد.
	n فرد	a دارای یک ریشه ی n ام $\sqrt[n]{a}$ است.	$a = -32$ $n = 5$	-32 دارای یک ریشه ی پنجم $\sqrt[5]{-32} = -2$ است.

کار در کلاس

۱ حاصل هر عبارت را به دست آورید :

$$\begin{array}{llll} \sqrt[3]{125} = 5 & \sqrt[5]{-32} = -2 & \sqrt[7]{128} = 2 & \sqrt[4]{256} = 4 \\ \sqrt[9]{-1} = -1 & \sqrt[4]{625} = 5 & -\sqrt[4]{16} = -2 & \sqrt[5]{\frac{-1}{32}} = -\frac{1}{2} \\ \sqrt[7]{-128} = -2 & \sqrt[3]{-0.001} = -0.1 & -\sqrt{1} = -1 & \sqrt[6]{0} = 0 \end{array}$$

۲ الف) می دانید که $\sqrt{x^2} = |x|$ درباره $\sqrt[4]{x^4}$ چه حدسی می زنید؟ $\sqrt[4]{x^4} = |x|$ درستی حدس خود را درباره چند عدد آزمایش کنید.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2 \\ |-2| = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt[4]{(-2)^4} = |-2|$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[4]{(3)^4} = \sqrt[4]{81} = 3 \\ |3| = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt[4]{(3)^4} = |3|$$

ب) کدام یک درست محاسبه شده است؟

$$\begin{array}{lll} \sqrt[4]{(-3)^4} = -3 & \text{غلط} & \sqrt[5]{3^5} = 3 & \text{صحیح} & \sqrt[6]{(-2)^6} = -2 & \text{غلط} \\ \sqrt[4]{(-3)^4} = 3 & \text{صحیح} & \sqrt[5]{(-3)^5} = -3 & \text{صحیح} & \sqrt[6]{(-2)^6} = 2 & \text{صحیح} \end{array}$$

پ) به طور کلی اگر n زوج باشد، $\sqrt[n]{a^n} = \dots$ |a| و اگر n فرد باشد $\sqrt[n]{a^n} = a$

ت) مثالی ارائه دهید که نشان دهد تساوی زیر همیشه درست نیست!

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n \Rightarrow \sqrt[4]{(-2)^4} \neq (\sqrt[4]{-2})^4$$

وجود ندارد

ث) در قسمت (ت) تساوی به ازای چه مقادیری برای a و n برقرار است؟ اگر عددی مثبت باشد، برای هر عدد طبیعی n تساوی برقرار است، اما

در صورتی که a عددی منفی باشد، فقط به ازای n های طبیعی فرد، تساوی برقرار است.

فعالیت

در سال نهم دیدید که :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \text{برای هر دو عدد a و b}$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \text{برای هر دو عدد مثبت a و b}$$

آیا رابطه بالا درباره $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{b}$ نیز برقرار می باشد؟ مثال بزنید. پله در صورتی که هر دو عدد نامنفی باشند، تساوی برقرار است.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = 2 \times 3 = 6 \\ \sqrt[4]{16 \times 81} = \sqrt[4]{1296} = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{16 \times 81}$$

با توجه به اینکه ۴ یک عدد زوج است، باید a و b **نامنفی**... باشند.

$$\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = 2 \times 3 = \dots 6 \dots \quad \sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{1296} = 6$$

درباره $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ چه می‌توان گفت؟ **در این مورد نیز تساوی برقرار است.**

آیا a و b حتماً باید مثبت باشند؟ **خیر لازم نیست**

مثالی از a و b مثبت و مثالی از a و b منفی ارائه کنید و نشان دهید تساوی همواره برقرار است.

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[5]{32} \times \sqrt[5]{243} &= 2 \times 3 = 6 \\ \sqrt[5]{32 \times 243} &= \sqrt[5]{7776} = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt[5]{32} \times \sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{32 \times 243}$$

به‌طور کلی داریم:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{ab} & a, b > 0 \text{ و } n \text{ زوج} \\ \sqrt[n]{ab} & a, b \text{ دلخواه و } n \text{ یک عدد طبیعی فرد} \end{cases}$$

قرارداد: به‌طور کلی این قرارداد را اعمال می‌کنیم:

وقتی می‌نویسیم $\sqrt[n]{a}$ و n را زوج فرض می‌کنیم، a را مثبت یا برابر صفر در نظر می‌گیریم.

بنابراین باید به یاد داشته باشیم که ریشه‌های زوج برای عددهای منفی بی‌معنا هستند. پس هرگاه $\sqrt[n]{x}$ نوشتیم، از آن می‌فهمیم که $x \geq 0$ است. تساوی‌های فوق را می‌توان به‌صورت مقابل نمایش داد:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

کار در کلاس

۱ آیا $(\sqrt[5]{2})^5$ و $\sqrt[5]{2^5}$ با هم برابرند؟ **بله با هم برابرند. زیرا:** $(\sqrt[5]{2})^5 = \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \sqrt[5]{2^5}$

درباره $(\sqrt[4]{-2})^4$ و $\sqrt[4]{(-2)^4}$ چه می‌توان گفت؟

$(\sqrt[4]{-2})^4$ تعریف نشده است. ولی: $\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$

۲ با توجه به اینکه

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt[5]{2})^3 &= \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \\ &= \sqrt[5]{2^3} \end{aligned}$$

۳ درستی رابطه $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$ را با مقادیرهای مختلف به m, k و a بررسی کنید (اگر k زوج باشد، a باید مثبت باشد).

$$(\sqrt[4]{2})^3 = \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2 \times 2 \times 2} = \sqrt[4]{2^3}$$

$$(\sqrt[3]{7})^4 = \sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{7 \times 7 \times 7 \times 7} = \sqrt[3]{7^4}$$

$$(\sqrt[5]{-2})^3 = \sqrt[5]{-2} \times \sqrt[5]{-2} \times \sqrt[5]{-2} = \sqrt[5]{(-2)(-2)(-2)} = \sqrt[5]{(-2)^3}$$

$$(\sqrt[5]{-2})^4 = \sqrt[5]{-2} \times \sqrt[5]{-2} \times \sqrt[5]{-2} \times \sqrt[5]{-2} = \sqrt[5]{(-2)(-2)(-2)(-2)} = \sqrt[5]{(-2)^4}$$

۱ جدول زیر را کامل کنید.

$\sqrt[n]{a^n}$	زوج n	$a > 0$	$n=4$ $a=2$	$\sqrt[4]{2^4} = 2 \quad (2 = 2)$
		$a < 0$	$n=4$ $a=-2$	$\sqrt[4]{(-2)^4} = 2 \quad (2 = -2)$
	فرد n	$a > 0$	$n=3$ $a=2$	$\sqrt[3]{2^3} = 2$
		$a < 0$	$n=3$ $a=-2$	$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می‌گیرید؟

در صورتی که n فرد باشد $\sqrt[n]{a^n} = a$ است. اما اگر n زوج باشد $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ است.

۲ جدول زیر را کامل کنید.

$(\sqrt[n]{a})^n$	زوج n	$a > 0$	$n=4$ $a=16$	$(\sqrt[4]{16})^4 = 2^4 = 16$
		$a < 0$	$n=4$ $a=-16$	تعریف نشده $\rightarrow (\sqrt[4]{-16})^4$
	فرد n	$a > 0$	$n=3$ $a=8$	$(\sqrt[3]{8})^3 = 2^3 = 8$
		$a < 0$	$n=3$ $a=-8$	$(\sqrt[3]{-8})^3 = (-2)^3 = -8$

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می‌گیرید؟ همواره $(\sqrt[n]{a})^n = a$ است، فقط در حالتی که n زوج است، a نمی‌تواند منفی باشد.

تمرین

۱ الف) یکی از علامت‌های $<$ یا $>$ را در \square قرار دهید.

$$(0/5)^2 \square (0/5)^3$$

$$\sqrt{0/25} \square \sqrt[3]{0/25}$$

اصلاح شد به ۰/۲۵ ←

ب) وقتی $0 < a < 1$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در \square قرار دهید.

$$a^2 \square a^3$$

$$\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$$

۲ فرض کنیم $a = -1$ است، در \square علامت مناسب را قرار دهید.

$$\sqrt[3]{a} \square \sqrt[5]{a}$$

$$\sqrt[5]{a} \square \sqrt[1]{a}$$

$$a^2 \square a^3$$

$$a^2 \square a^5$$

۳ با توجه به تعریف ریشه (اگر $\sqrt[n]{a} = b$ آنگاه $b^n = a$)، نشان دهید برای هر عدد a و هر عدد طبیعی n (به شرط با معنا بودن رادیکال)

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad \text{رابطه زیر برقرار است:} \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = b^n = a$$

۴ آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ برقرار است؟ n را برابر ۳، ۴ یا ۵ بگیرید و به جای a و b مقدارهای عددی بدهید.

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{8} &= 1 + 2 = 3 \\ \sqrt[3]{1+8} &= \sqrt[3]{9} \approx 2/0.8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{8} \neq \sqrt[3]{1+8}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{81} &= 1 + 3 = 4 \\ \sqrt[4]{1+81} &= \sqrt[4]{82} \approx 3/0.9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{81} \neq \sqrt[4]{1+81}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[5]{-1} + \sqrt[5]{-32} &= -1 + (-2) = -3 \\ \sqrt[5]{-1+(-32)} &= \sqrt[5]{-33} \approx -2/0.1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt[5]{-1} + \sqrt[5]{-32} \neq \sqrt[5]{-1+(-32)}$$

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \rightarrow \sqrt[3]{5^{-3}} = \frac{1}{5}$$

۵ عددهای زیر را مانند نمونه محاسبه کنید.

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow \sqrt[5]{2^{-5}} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \Rightarrow \sqrt[4]{3^{-4}} = \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad \frac{1}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow \sqrt[7]{\frac{1}{128}} = \frac{1}{2}$$

۶ به جای a و b و عدد طبیعی n عددهایی قرار دهید؛ به طوری که :

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{8}{27}} &= \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} &= \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}$$

الف) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار باشد.

ب) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار نباشد. (وقتی n زوج است، a و b هر دو مثبت اند). ~~منفی~~

$$\sqrt[4]{\frac{-16}{-81}} = \sqrt[4]{\left(\frac{-2}{-3}\right)^4} = \frac{2}{3} \quad \text{است در حالی که} \quad \frac{\sqrt[4]{-16}}{\sqrt[4]{-81}} \quad \text{تعریف نشده است.}$$

درس سوم: توان های گویا

فعالیت



پدر محمد یک زیست شناس است و در یک آزمایشگاه پزشکی کار می کند. در آزمایشی یک نوع باکتری کشت داده شده که در شرایط مساعد، وزن این باکتری ها در هر ساعت ۲ برابر می شود. وزن باکتری ها در لحظه شروع ۱ گرم است؛ بنابراین وزن باکتری ها پس از یک ساعت ۲ گرم، پس از ۲ ساعت برابر ۴ گرم، و پس از ساعت n م برابر 2^n گرم می شود:

$1, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$

محمد از پدرش پرسید: «آیا حتماً تا پایان ساعت باید منتظر بمانیم؟ آیا می توانیم وزن باکتری ها را پس از نیم ساعت محاسبه کنیم؟»

پدرش گفت: تو فکر می کنی وزن باکتری ها پس از نیم ساعت چقدر می شود؟
محمد گفت: حدس می زنم وزن آنها $2^{\frac{1}{2}}$ گرم شده باشد. چون نیم همان $\frac{1}{2}$ است.
پدرش گفت: $2^{\frac{1}{2}}$ چقدر است؟

محمد گفت: نمی دانم ولی باید بتوانیم مقدار آن را پیدا کنیم.

اگر فرض کنیم در هر نیم ساعت وزن باکتری ها b برابر شود، در این صورت بعد از یک ساعت وزن باکتری ها باید برابر $b^2 = b \times b$ شود. اما می دانیم پس از یک ساعت وزن باکتری ها دو برابر می شوند؛ پس $b^2 = 2$ ؛ یعنی $b = \sqrt{2}$ (زیرا b مثبت است).

نتیجه جالبی است! $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. مشابه این رابطه را می توانیم برای توان های دیگر نیز تعریف کنیم: $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ ، $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$ ؛ همچنین برای عددهای دیگر $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$. می توانیم نماهای کسری با صورت ۱ را تعریف کنیم. a عددی حقیقی و مثبت است.

برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

توجه داریم اگر $a < 0$ در این صورت $a^{\frac{1}{n}}$ تعریف نمی شود، به عنوان مثال عبارت هایی مانند $(-1)^{\frac{1}{3}}$ و $(-2)^{\frac{1}{4}}$ تعریف نمی شوند.

فعالیت

۱) توان های کسری زیر را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

$$\begin{array}{lll} 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} & 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} & 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4} \\ 5^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{5} & 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} & (-3)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-3} \text{ تعریف نمی شود} \\ 6^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{6} & 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} & (-5)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{-5} \text{ تعریف نمی شود} \end{array}$$

۲) کدام درست است؟

الف) $(-32)^{\frac{1}{5}} = -2$ غلط صحیح ب) $\sqrt[5]{-32} = -2$

فعالیت

حاصل $a^{\frac{m}{n}}$ که $a > 0$ و m و n دو عدد طبیعی هستند را چگونه حساب می کنیم؟

در مبحث توان با نماهای طبیعی یادتان هست چگونه عمل کردیم؟

(قاعده ضرب توان) $2^6 = 2^{2 \times 3} = (2^2)^3$

در مورد توان های گویا هم می توانیم به طریق مشابه عمل کنیم:

$$2^{\frac{2}{3}} = 2^{2 \times \frac{1}{3}} = (2^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^2} \quad 5^{\frac{8}{3}} = 5^{8 \times \frac{1}{3}} = (5^8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5^8}$$

به طور کلی:

هرگاه $a > 0$ برای هر دو عدد طبیعی m و n ، توان کسری و غیر صحیح $\frac{m}{n}$ را برای a چنین تعریف می کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

اکنون شما اعداد توان دار را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

$$\begin{array}{lll} \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} \text{ (ب)} & \sqrt[7]{3^2} = 3^{\frac{2}{7}} \text{ (ب)} & \sqrt[5]{5^2} = 5^{\frac{2}{5}} \text{ (الف)} \\ (-3)^{\frac{2}{3}} \text{ (ج) تعریف نشده} & \sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} \text{ (ث)} & (-6)^{\frac{2}{7}} \text{ (ت) تعریف نشده} \end{array}$$

اگر r و s دو عدد گویا باشند، و $a > 0$ قواعد توان برای اعداد گویا مانند اعداد صحیح برقرار بوده و داریم:

۱) $a^r \times a^s = a^{r+s}$

۲) $(a^r)^s = a^{rs}$

۳) $(ab)^r = a^r \times b^r$

باکتری ها موجودات بسیار ریزی هستند که در انواع مختلف در همه جا حضور دارند. بیشتر باکتری ها در فاصله ۲۰ دقیقه به حداکثر رشد خود می رسند و می توانند شروع به تولید مثل کنند. در شرایط محیطی مناسب، باکتری با سرعت زیادی تکثیر می شود. مثلاً یک باکتری بعد از ۲۰ دقیقه به دو باکتری تبدیل می شود و بعد از ۲۰ دقیقه دیگر به چهار باکتری تبدیل می شود و به همین ترتیب، در فاصله هر ۲۰ دقیقه، تعداد باکتری ها دو برابر می شود و به ترتیب ۸ و ۱۶ و ۳۲ و ۶۴ و ۱۲۸ و ۲۵۶ و ... باکتری پدید می آید. اگر این روش تکثیر باکتری ها ۲۴ ساعت ادامه یابد، از یک باکتری، توده ای از باکتری ها به وزن ۲۰۰۰ تن به وجود خواهد آمد. البته عملاً چنین اتفاقی نمی افتد، زیرا در این صورت، آب و مواد غذایی لازم به زودی در محیط زندگی آنها تمام می شود و دیگر قادر به تولید مثل بیشتر نخواهند بود. اگرچه بعضی از باکتری ها عامل فساد مواد غذایی و بیماری هستند؛ اما بسیاری از باکتری ها مفیدند. باکتری ها در تهیه فراورده های غذایی و شیمیایی و همچنین در شناسایی و استخراج معادن و پاکسازی محیط زیست کاربرد دارند. باکتری هایی نیز برای خالص سازی عناصر معدنی مانند مس و اورانیوم کاربرد دارند. همچنین باکتری ها در پاکسازی آب ها و خاک های آلوده به آلاینده های نفتی و شیمیایی کاربرد وسیعی دارند. باکتری ها نقش بسیار مهم در اکوسیستم جهانی (اکوسیستم های آبی و خشکی) دارند. مهم ترین راه دستیابی گیاهان به نیتروژن توسط برخی از باکتری ها صورت می گیرد.

۱ تساوی های زیر را مانند نمونه به صورت رادیکالی بنویسید.

$$3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$$

$$3^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{3^5} = \sqrt[4]{3^4 \times 3} = \sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[4]{3} = 3\sqrt[4]{3}$$

$$4^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{4}$$

$$2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}} = 2^{\frac{13}{6}} = 2^{2 + \frac{1}{6}} = 2^2 \times 2^{\frac{1}{6}} = 4\sqrt[6]{2}$$

$$4^{\frac{7}{5}} = 4^{1 + \frac{2}{5}} = 4 \times 4^{\frac{2}{5}} = 4\sqrt[5]{4^2}$$

$$4^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{4^7} = \sqrt[5]{4^5 \times 4^2} = \sqrt[5]{4^5} \times \sqrt[5]{4^2} = 4\sqrt[5]{4^2}$$

روش دوم

$$(4 \times 2)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$5^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^3 \times 5} = \sqrt[3]{5^3} \times \sqrt[3]{5} = 5\sqrt[3]{5}$$

$$(16^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{4}} = 16^{\frac{1}{3} \times \frac{2}{4}} = 16^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{16} = 2$$

$$6^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{6^3}$$

$$5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 5^{\frac{3}{3}} = 5$$

۲ رادیکال ها را در صورت امکان به شکل توان کسری بنویسید.

$$\sqrt[7]{3^2} = 3^{\frac{2}{7}}$$

$$\sqrt[5]{2^5} = 2^{\frac{5}{5}} = 2$$

$$\sqrt[3]{7^{\frac{2}{3}}} = 7^{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}} = 7^{\frac{2}{9}}$$

$$\sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\sqrt[5]{19} = 19^{\frac{1}{5}}$$

$$\sqrt[5]{6^4} = \sqrt[5]{2^6} = 2^{\frac{6}{5}}$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3$$

$$\sqrt[5]{2^5} = 2^{\frac{5}{5}} = 2$$

۳ جدول های زیر را کامل کنید :

$a > 0$	a^3	a^{-3}	a^0	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{2}{3}}$
$a = 5$	5^3	$\frac{1}{5^3}$	5^0	$5^{\frac{1}{2}}$	$5^{\frac{2}{3}}$

$a < 0$	a^3	a^{-3}	a^0	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{6}{3}}$	$a^{\frac{2}{3}}$
$a = -5$	$(-5)^3$	$\frac{1}{(-5)^3}$	$(-5)^0$	تعریف نمی شود	$(-5)^2 = 25$	$(-5)^{\frac{2}{3}}$

شعاعیت

۱ با استفاده از نمای کسری نشان دهید که $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$ است. تساوی را کامل کنید ($a > 0$).

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[nm]{a}$$

۲ دبیر : به خاطر دارید که حاصل یک رادیکال با فرجه زوج همواره عددی مثبت است. مثلاً $\sqrt[4]{81} = 3$

به علاوه در تعریف نمای کسری $a^{\frac{1}{n}}$ باید a عددی مثبت فرض شود. اکنون $\sqrt[4]{(-3)^4}$ را به دست آورید.

نسترن : اگر جای توان ها را مانند توان های طبیعی عوض کنیم، چه اشکالی دارد؟

دبیر : این کار را انجام می دهیم؛ خودت اشکال را پیدا کن!

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = [(-3)^4]^{\frac{1}{4}} = [(-3)^{\frac{1}{4}}]^4 = (-3)^{\frac{1}{4} \times 4} = (-3)^1 = -3$$

نسترن : فکر کنم متوجه اشکال کار شده ام. ما حق نداریم بنویسیم $(-3)^{\frac{1}{4}}$ چون در تعریف $a^{\frac{1}{n}}$ گفتیم a باید مثبت باشد.

دبیر : آفرین، کاملاً درست است. حالا چه کار کنیم؟

حمیده : بهتر است اول $(-3)^4$ را حساب کنیم، یعنی

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{81} = 3$$

دبیر: آفرین حمیده، جواب شما درست است. البته می توانید، همان گونه که قبلاً گفتیم چون ۴ عددی زوج است از الگوی زیر نیز استفاده کنید.

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$$

۳ با توجه به فعالیت ۱ در صفحه قبل تساوی ها را کامل کنید.

(الف) $(5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = (\sqrt{5})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3 \times 2]{5} = 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}$

(ب) $(4^{\frac{1}{7}})^{\frac{1}{5}} = (\sqrt[7]{4})^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\sqrt[7]{4}} = \sqrt[5 \times 7]{4} = 4^{\frac{1}{35}} = 4^{\frac{1}{7} \times \frac{1}{5}}$

(پ) اکنون برای هر عدد $a > 0$ ، به ازای هر دو عدد گویای غیر صحیح r و s درستی تساوی $(a^r)^s = a^{rs}$ را برای $r = \frac{1}{4}$ و $s = \frac{1}{p}$ ، تحقیق کنید.

$$(a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{p}} = (\sqrt[4]{a})^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[p \times 4]{a} = a^{\frac{1}{4p}} = a^{\frac{1}{4} \times \frac{1}{p}}$$

تمرین

۱ هر یک از توان های کسری زیر را به صورت رادیکال بنویسید.

$$\begin{aligned} 16^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{16} & 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} &= 3^{\frac{3}{3}} = \sqrt[3]{3^3} & 5^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{5} & 4^{\frac{3}{7}} &= \sqrt[7]{4^3} & (4^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} &= 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} \\ a^{\frac{2}{5}} &= \sqrt[5]{a^2} & 3^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{3} & 32^{-\frac{1}{5}} &= (\frac{1}{32})^{\frac{1}{5}} & 4^{\frac{2}{3}} &= \sqrt[3]{4^2} & 17^{-\frac{1}{2}} &= (\frac{1}{17})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{17}} & 32^{\frac{2}{5}} &= \sqrt[5]{32^2} \end{aligned}$$

۲ هر یک از رادیکال ها را به صورت توان کسری بنویسید. توجه داشته باشید که نمای کسری وقتی معنا دارد که پایه عدد مثبت باشد.

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}} \quad \sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}} \quad \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \quad \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}} \quad \sqrt[n]{a^2} = a^{\frac{2}{n}} \quad \sqrt[5]{a^{10}} = a^{\frac{10}{5}} = a^2$$

در این تمرین با فرض مثبت بودن a پاسخ ها نوشته شده اند.

۳ می دانیم $\sqrt[6]{a^2} = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ $\sqrt[12]{a^4} = (a^4)^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{4}{12}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

آیا تساوی $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$ همواره برقرار است $(a > 0)$ ؟ n, m و k طبیعی اند نتیجه بگیرید که هر سه عدد $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[4]{2^2}$ و $\sqrt[6]{2^3}$ برابر

پله این تساوی برای اعداد مثبت a همواره برقرار است.

$$\sqrt[6]{2^3} = \sqrt[3 \times 2]{2^{3 \times 1}} = \sqrt[3]{2^1} = \sqrt{2} \quad \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[2 \times 2]{2^{2 \times 1}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$$

۴ فرض کنیم $a=64$ ، $r = \frac{1}{3}$ و $s = \frac{1}{p}$ مقدارهای عددی a^{r-s} و $\frac{a^r}{a^s}$ را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای a ، r و s انتخاب کنید و بار دیگر مقدارهای a^{r-s} و $\frac{a^r}{a^s}$ را محاسبه و با هم مقایسه کنید. می توانید از ماشین حساب کمک بگیرید. چه نتیجه ای می گیرید؟

$$\left. \begin{aligned} \frac{a^r}{a^s} &= \frac{64^{\frac{1}{3}}}{64^{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[4]{64}} = \frac{4}{4} = 1 \\ a^{r-s} &= 64^{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = 64^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{64} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{a^r}{a^s} &= \frac{729^{\frac{1}{3}}}{729^{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt[3]{729}}{\sqrt[4]{729}} = \frac{9}{9} = 1 \\ a^{r-s} &= 729^{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = 729^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{729} = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{a^r}{a^s} &= \frac{1024^{\frac{1}{3}}}{1024^{\frac{1}{5}}} = \frac{\sqrt[3]{1024}}{\sqrt[5]{1024}} = \frac{10}{10} = 1 \\ a^{r-s} &= 1024^{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}} = 1024^{\frac{2}{15}} = (2^{10})^{\frac{2}{15}} = 2^4 = 16 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

۵ حساب کنید.

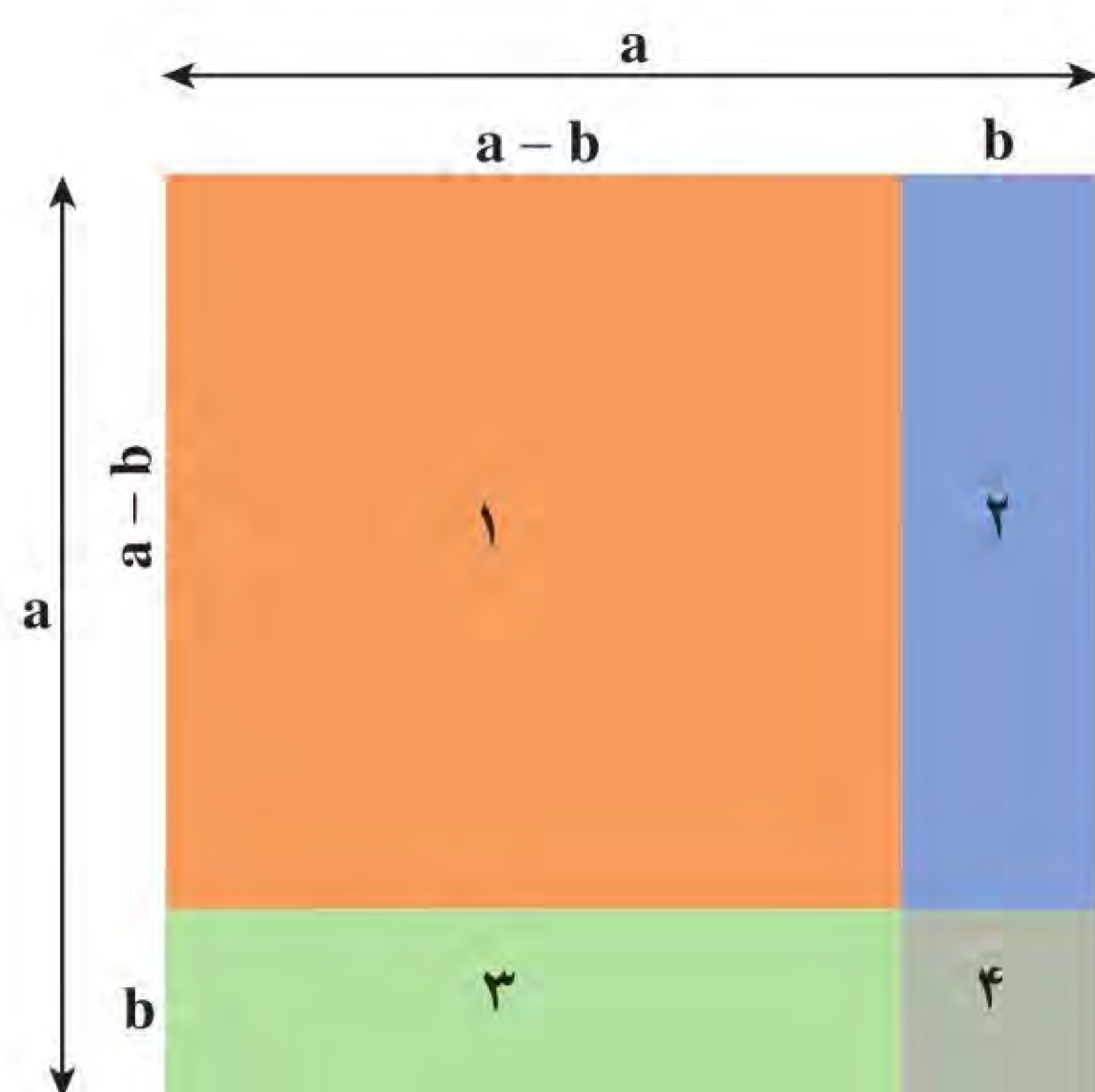
$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[9]{64} = 2$$

$$\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt[4]{81} = 3$$

درس چهارم: عبارات جبری

فعالیت



$$S_1 = (a-b)^2$$

$$S_1 = S - S_2 - S_3 - S_4$$

$$= a^2 - b(a-b) - b(a-b) - b^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

در سال گذشته با برخی از اتحادهای جبری آشنا شده‌اید. می‌توانید بگویید چرا به تساوی

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1)$$

اتحاد گفته می‌شود؟

در حقیقت می‌توان a و b را در دو طرف با هر دو عدد دلخواه جایگزین کرد و برای دو طرف یک عدد به دست آورد. برای مثال اگر $a = \frac{1}{5}$ و $b = 3$ اختیار شود.

$$\left(\frac{1}{5} + 3\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{5} \times 3 + 3^2$$

$$\left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} + \frac{6}{5} + 9 \rightarrow \frac{256}{25} = \frac{256}{25}$$

یا اگر در رابطه (1) به جای b ، $-b$ قرار دهیم، به دست می‌آوریم:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2)$$

گاهی هم دو اتحاد (1) و (2) را با هم می‌نویسیم:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (3)$$

اکنون شما می‌توانید اتحادهای دیگری به دست آورید.

۱ با محاسبه $(a+b)^3$ اتحاد دیگری به دست می‌آید که به اتحاد مکعب مجموع مشهور است. جای خالی را در محاسبه تکمیل کنید.

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + \underline{a^2b} + \underline{2a^2b} + \underline{2ab^2} + \underline{ab^2} + b^3$$

که با جمع جملات متشابه در دو طرف دوم، اگر درست عمل کرده باشید، به صورت زیر در می‌آید.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

می‌توانیم b را در سرتاسر اتحاد فوق به $-b$ تبدیل کنیم و اتحاد دیگری به دست آوریم:

$$(a-b)^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

۲ یک بار دیگر $(a-b)^3$ را از راه دیگر و با استفاده از اتحاد مربع تفاضل، یعنی اتحاد شماره (۲) محاسبه کنید.

$$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) \\ = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3$$

۳ اگر ابتدا طرف دوم هر یک از اتحادهای ۴ گانه فوق را بنویسیم، مثلاً

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)(a-b)(a-b) \quad (4)$$

می‌گوییم عبارت سمت چپ؛ یعنی $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ را به حاصل ضرب سه عبارت سمت راست تجزیه کرده‌ایم. هر یک از عبارت‌های $a-b$ را در (۴) یک عامل یا شمارنده تجزیه می‌نامیم. ممکن است عامل‌های تجزیه مساوی نباشند. تجزیه برخی عبارت‌های جبری به دسته‌بندی مناسب جملات و مهارت‌های بیشتری نیاز دارد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

یادآوری

اتحادهایی که سال قبل خوانده‌اید.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

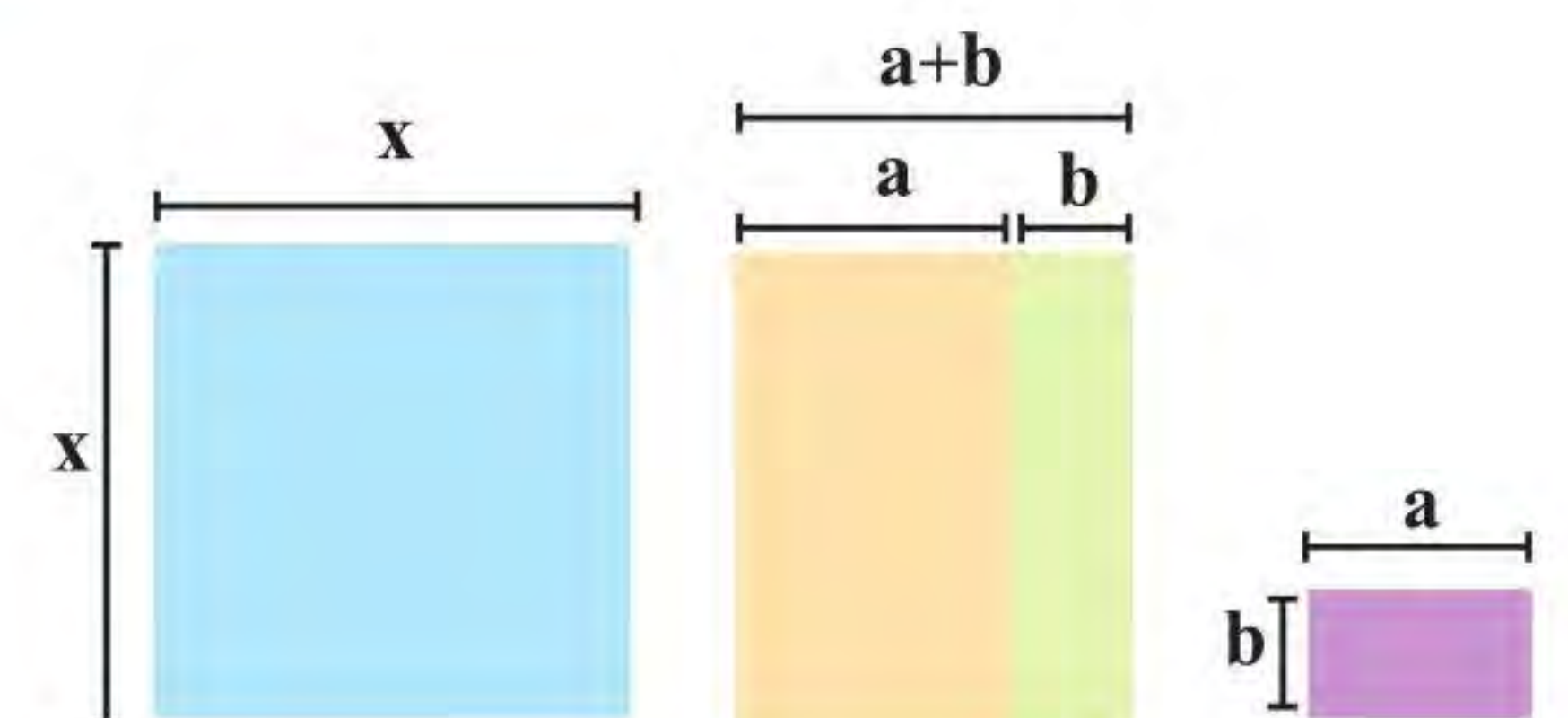
$$(a+x)(a+y) = a^2 + (x+y)a + xy$$

مثال ۱

عبارت $2x^2 + 3x + 1$ را تجزیه کنید.

می‌نویسیم:

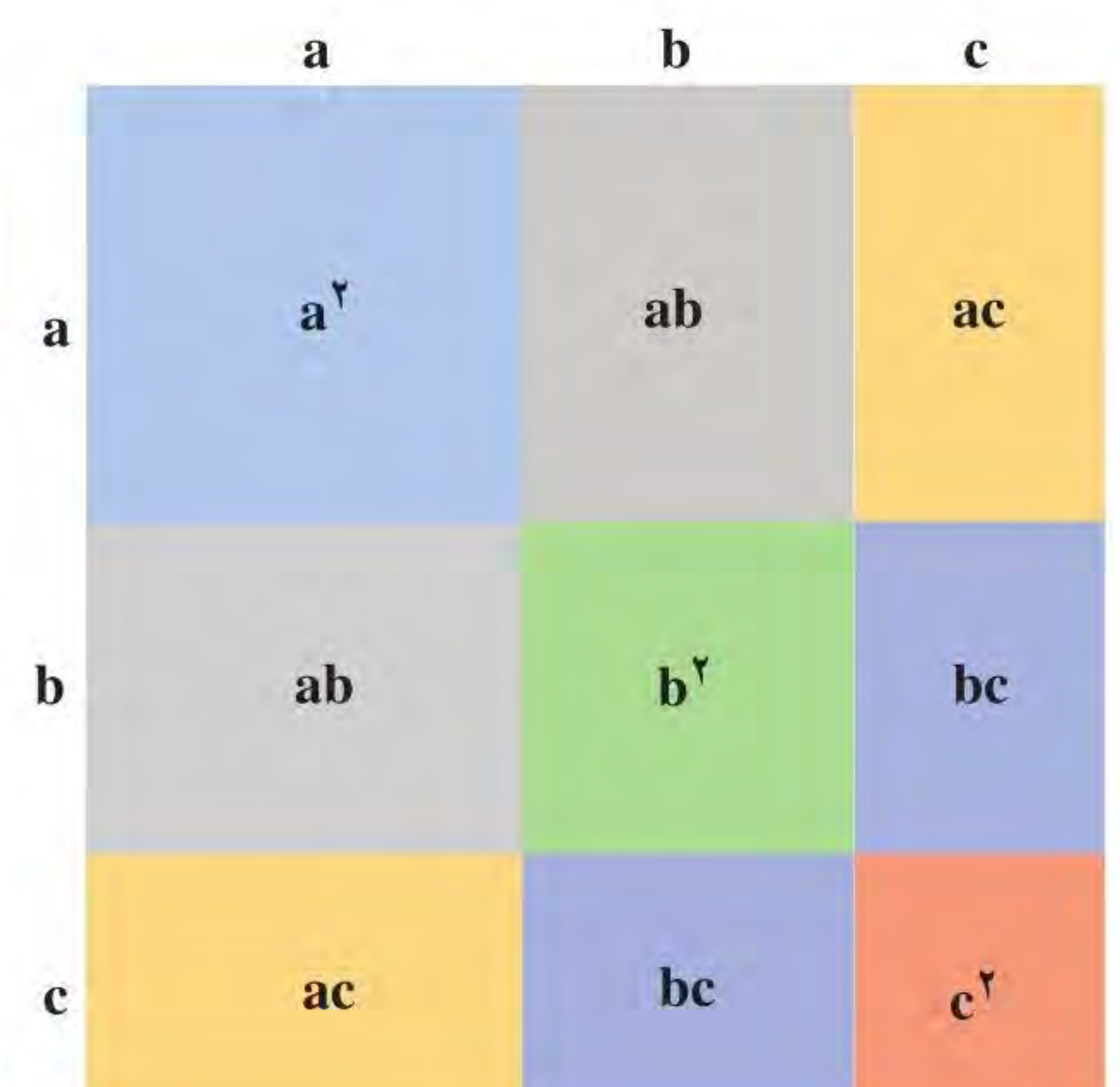
$$2x^2 + 3x + 1 = x^2 + 2x + 1 + x^2 + x \\ = (x+1)^2 + x(x+1) \\ = (x+1)(x+1+x) = (x+1)(2x+1)$$



مثال ۲

عبارت $a^3 - 2ab^2 + a^2b - 2ab^2$ را تجزیه کنید:

$$a^3 - 2ab^2 + a^2b - 2ab^2 = a^2(a+b) - 2b(a+b) \\ = (a+b)(a^2 - 2b)$$



کار در کلاس

۱ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و ساده کنید.

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - a^2b + b^3 = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

۲ با استفاده از پرسش ۱، عبارت‌های $a^3 + b^3$ و $a^3 - b^3$ را تجزیه کنید و اتحادهای جدیدی

به دست آورید.

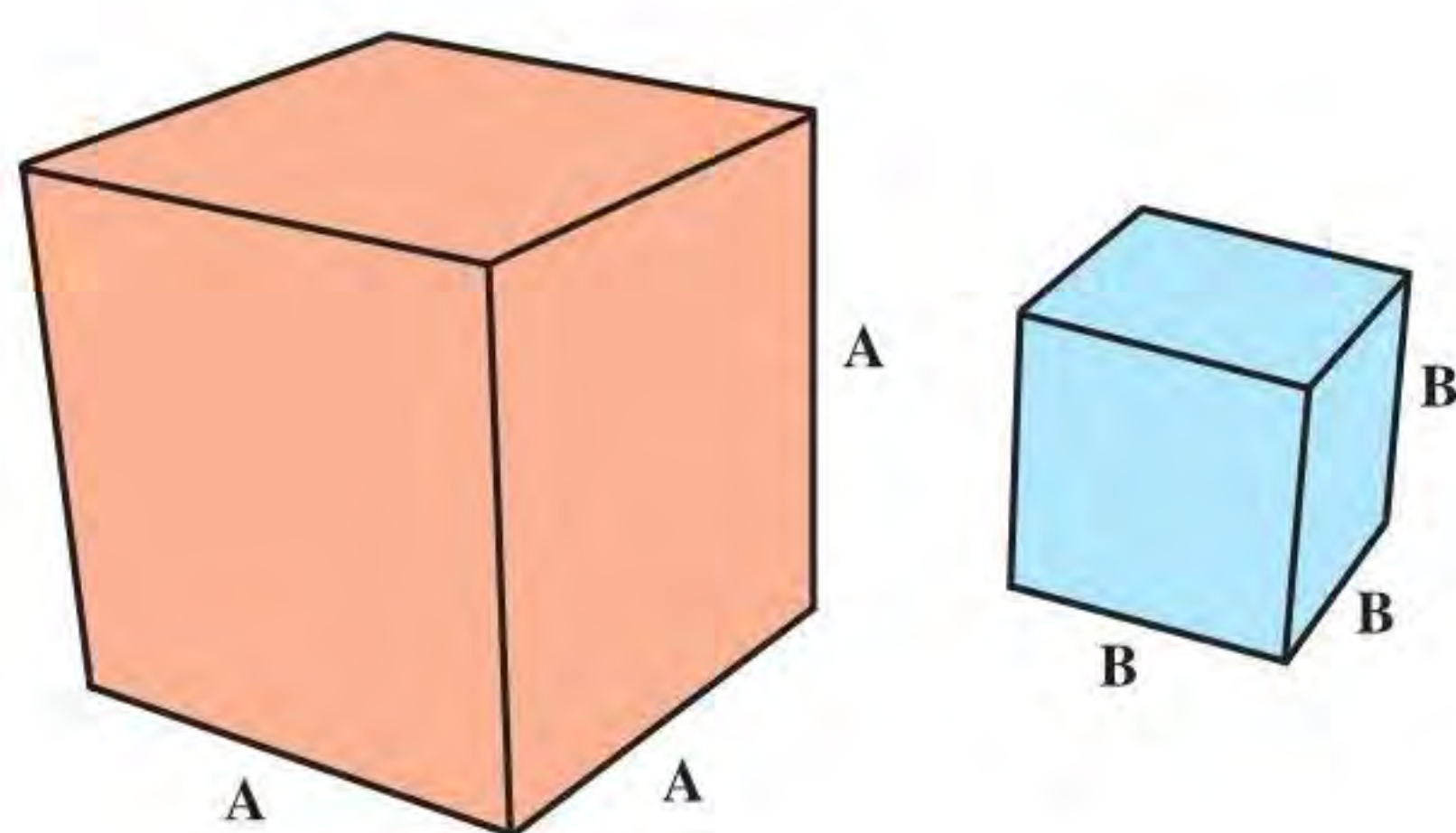
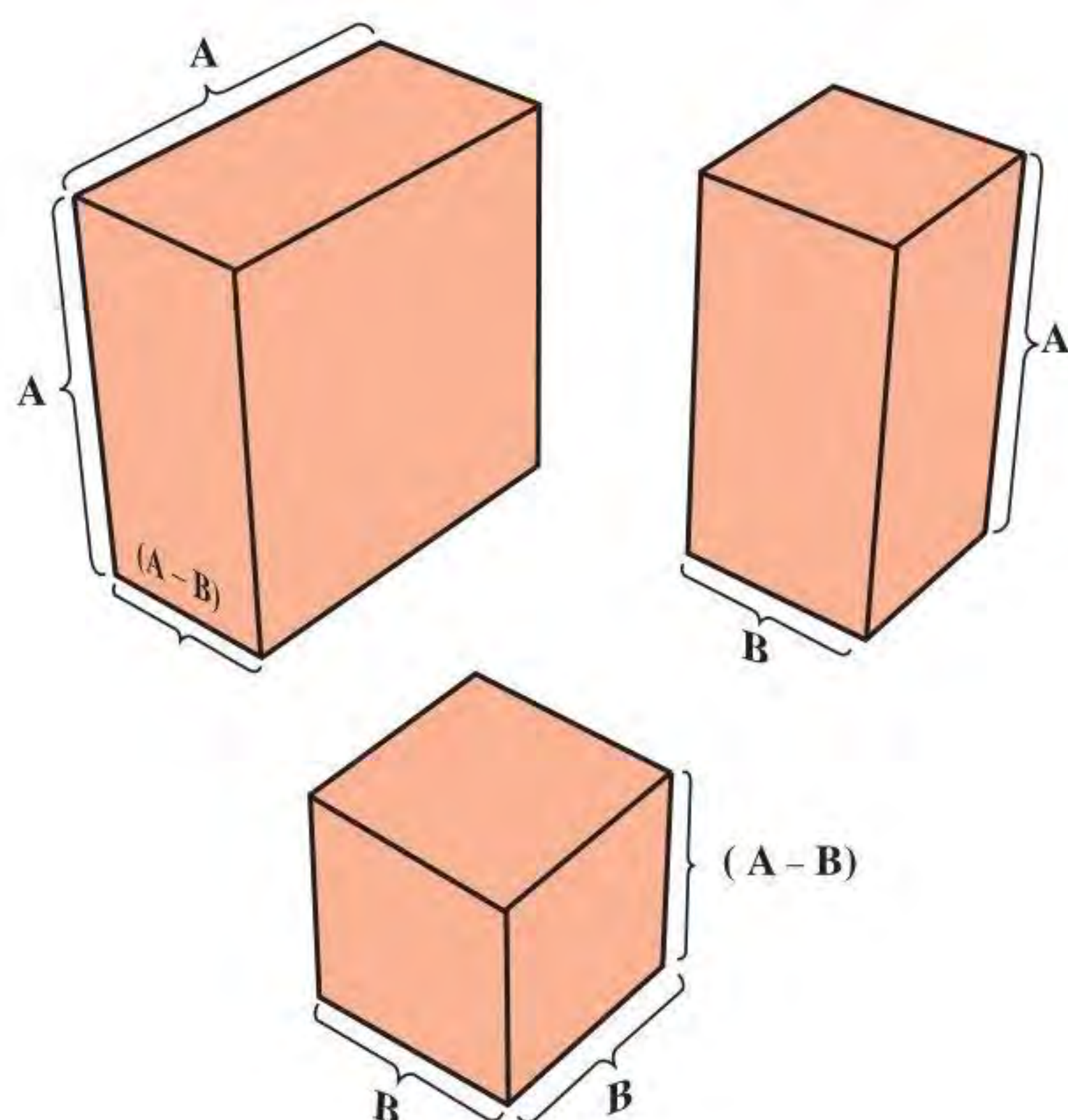
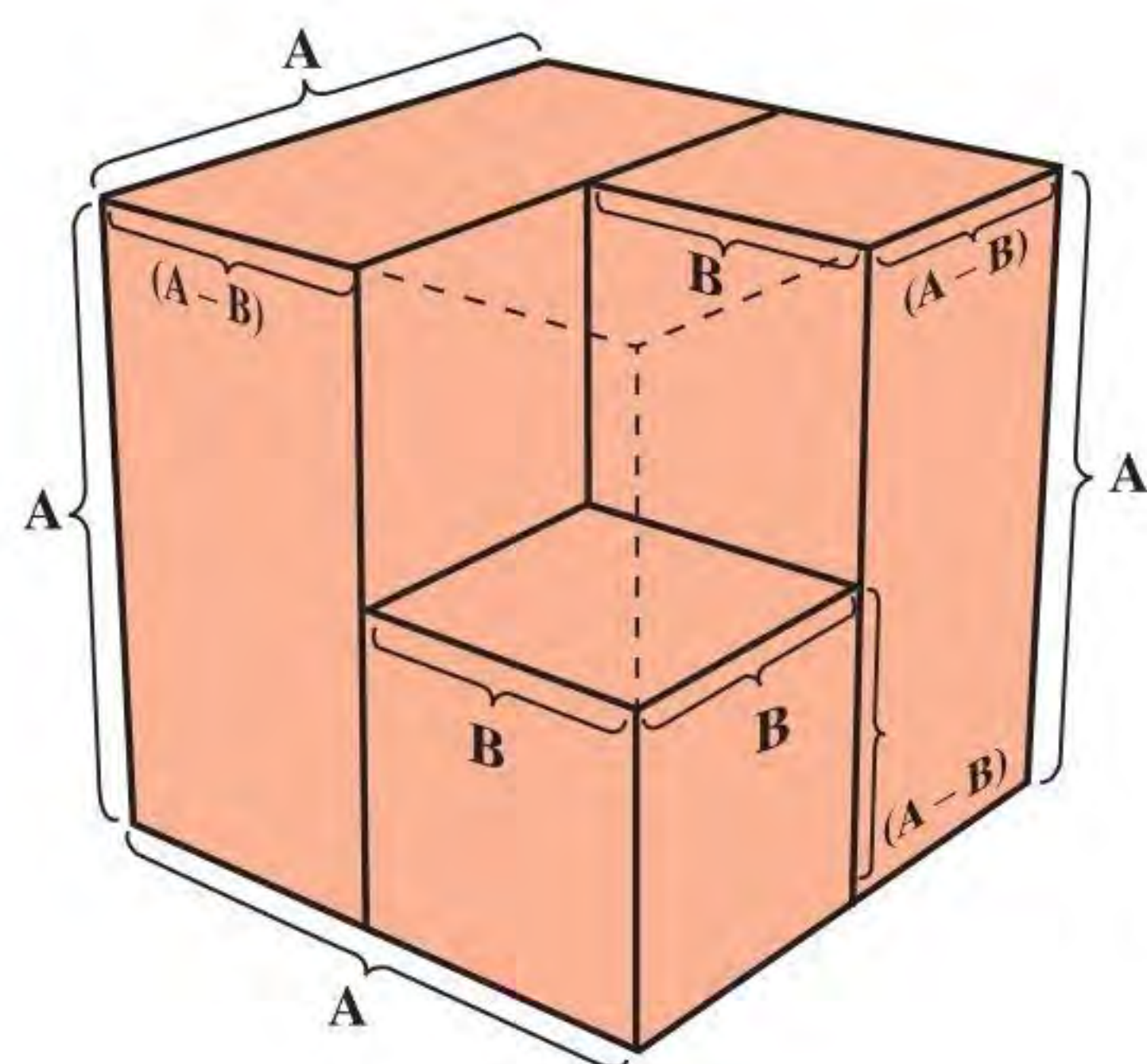
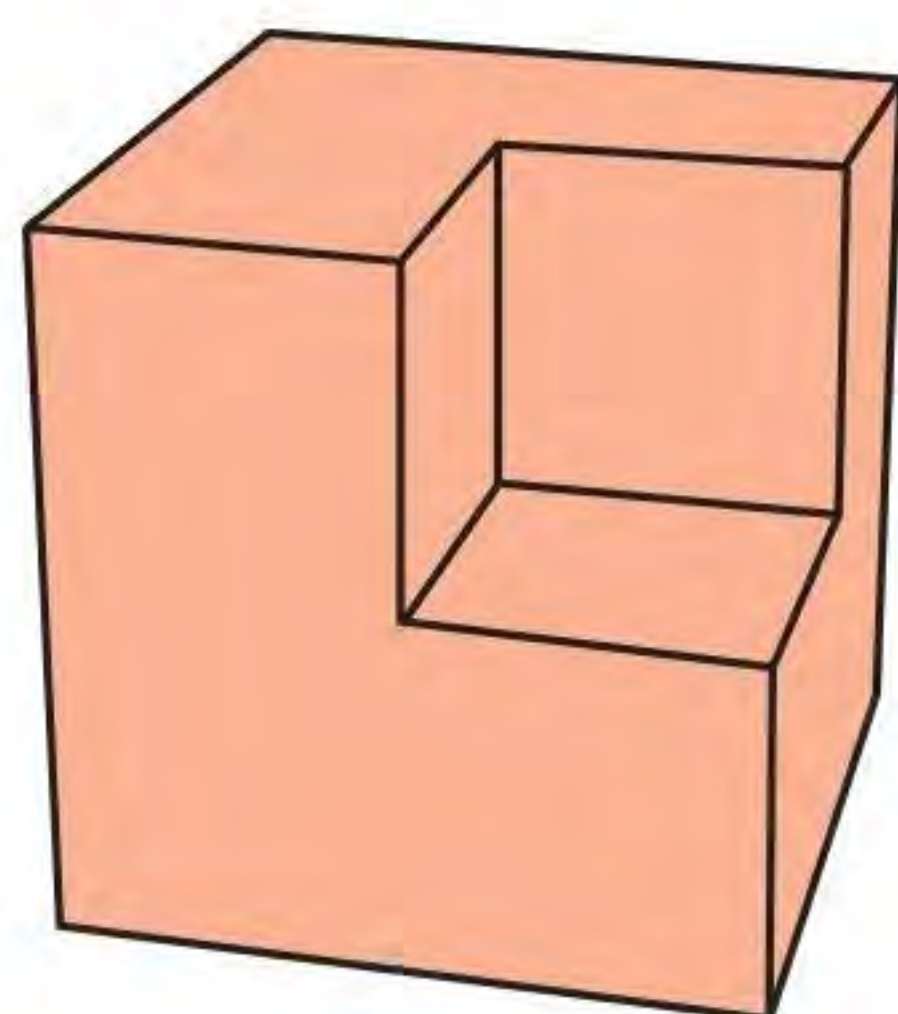
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

اتحادهای چاق و لاغر

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

 $A^3 - B^3$ 

$$8x^3 - 27 = (2x)^3 - 3^3$$

$$= (2x-3)[(2x)^2 + 2x \times 3 + 3^2]$$

$$= (2x-3)(4x^2 + 6x + 9)$$

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$x^3 - 125 = (x-5)(x^2 + 5x + 25)$$

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1)$$

فعالیت

واژه‌های مضرب و شمارنده را در حساب اعداد به‌خاطر دارید:

$$12 = 3 \times 4$$

هر یک از عددهای ۳ و ۴ را یک شمارنده عدد ۱۲ و عدد ۱۲ را مضرب هر یک از این عددها می‌نامیم. ۱۲ شمارنده‌های دیگری نیز دارد، از جمله خود عدد ۱۲. عدد ۳ مضرب‌های دیگری دارد، از جمله خود عدد ۳ و همچنین هر یک از عددهای ۶، ۹، ۱۵ و ...

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad \text{مشابه این در اتحاد مزدوج}$$

هر یک از عبارت‌های $a-b$ و $a+b$ یک شمارنده $a^2 - b^2$ است. همچنین $a^2 - b^2$ هم مضرب $a-b$ و هم مضرب $a+b$ است.

آیا $a+b$ مضرب دیگری دارد؟

۱ مضرب‌های هر عبارت جبری و یا یک چند جمله‌ای، از ضرب آن عبارت در عددهای صحیح و یا عبارت‌های جبری دیگر (و یا همزمان در هر دو) به‌دست می‌آیند:

... و $(a+b)(a-b)$ و $-4(a+b)$ و $(a+b)(a+b)^2$ و $2(a+b)$ و $a+b$: بعضی از مضرب‌های $a+b$ بعضی از مضرب‌های $a-b$ را بنویسید.

$$3(a-b), (a-b)(a^2 + ab + b^2), (a-b)(x+y-z), \dots$$

۲ دو عبارت بنویسید که $a-b$ شمارنده هر یک از آنها باشد.

در این مورد می‌توان دو اتحاد را مثال زد:

$$\text{اتحاد چاق و لاغر: } a^3 - b^3 \quad \text{اتحاد مربع دو جمله‌ای: } (a-b)^2$$

۳ عبارت $27a^3 - 1$ مضرب کدام یک از عبارت‌هاست؟

$$\text{الف) } a-1 \quad \text{ب) } 3a-1 \quad \text{پ) } 9a^2+3a+1 \quad \text{ت) } 3a+1$$

با توجه به تجزیه‌ی آن -طبق اتحاد چاق و لاغر- یعنی: $(3a-1)(9a^2+3a+1)$

هر دو گزینه‌ی ب و پ صحیح هستند.

نکته: عبارت $\sqrt{3}(a+b)$ یک مضرب $a+b$ محسوب نمی‌شود. ضرایب عددی فقط می‌توانند عدد صحیح باشند.

۴ کدام یک از عبارت های زیر گویا هستند؟ **یاد آوری:** به طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشند. (ریاضی نهم صفحه ۱۱۴)

گزینه های الف و ب عبارت گویا هستند ولی گزینه های پ و ت گویا نیستند.

الف) $\frac{3x - \sqrt{7}}{x^2}$ ب) $\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$ پ) $\sqrt[3]{x} - 1$ ت) $\sqrt[3]{x^2} + x - 1$

نکته: یک عبارت گویا به ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می شود، تعریف نمی گردد. (مقدار ندارد)

۵ عبارت گویای زیر به ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی شود؟

جواب ندارد $\rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = -1$ و $x = 1$ و $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ و $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

بنابراین به ازای -1 و 1 تعریف نمی شود.

۶ حاصل کسرها را به دست آورید و ساده کنید.

الف) با توجه به این که می دانیم $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) = x - 1$ عبارت $x - 1$ را به عنوان مخرج مشترک در نظر می گیریم.

$$\frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 1} + \frac{3}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} + 1 + 2(\sqrt{x} - 1) + 3}{x - 1} = \frac{3\sqrt{x} + 2}{x - 1}$$

ب) با توجه به این که می دانیم $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ عبارت $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$ را به عنوان مخرج مشترک در نظر می گیریم.

$$\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{(x+1)(x^2+1) + (x-1)(x^2+1) - (x^2+1) + (x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{x^3+x+x^2+1+x^3-x-x^2-1-x^2-1+x^2-1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{2x^3+2x-2}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

مثال

حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} + \frac{1}{x - 1} = \frac{((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1)}{(\sqrt[3]{x^2} - 1)((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1)} + \frac{1}{x - 1} = \frac{(\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1}{(\sqrt[3]{x^2})^3 - 1^3} + \frac{1}{x - 1}$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x - 1} = \frac{((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1) + (x + 1)}{(x^2 - 1)} = \frac{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + x + 2}{x^2 - 1}$$

کار در کلاس

۱ صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید. (جاهای خالی را پر کنید)

الف) $\frac{x^6 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4-x^2+1}{x^2+1}$

ب) $\frac{x^3 - 1}{(x - 1)^3} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^3} = \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$

پ) $\frac{x^2 + 1}{x^4 - 1} = \frac{x^2 + 1}{(x^2+1)(x^2-1)} = \frac{1}{x^2-1}$

ت) $\frac{y^5 - y}{y^3 + y^2 + y} = \frac{y(y^4 - 1)}{y(y^2 + y + 1)} = \frac{(y^2-1)(y^2+1)}{y^2+y+1} = \frac{(y-1)(y^2+y+1)(y^2+1)}{y^2+y+1} = (y-1)(y^2+1)$

ث) $\frac{y^5 - y^3 - 12y}{8y^2 + 16y} = \frac{y(y^4 - y^2 - 12)}{8y(y+2)} = \frac{y(y^2-4)(y^2+3)}{8y(y+2)} = \frac{y(y-2)(y+2)(y^2+3)}{8y(y+2)} = \frac{(y-2)(y^2+3)}{8}$

۲ در اتحاد $a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$ قرار دهید $a = \sqrt[3]{x^2}$ و حاصل را بازنویسی کنید:

$(\sqrt[3]{x^2})^3 + 1 = (\sqrt[3]{x^2} + 1)(\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + 1)$

$x^2 + 1 = (\sqrt[3]{x^2} + 1)(\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + 1)$

۲ گویا کردن مخرج‌های گنگ: صورت و مخرج کسرهای زیر را مانند نمونه در عبارت‌هایی ضرب کنید که عبارت مخرج تبدیل به یک عبارت گویا شود.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+1} = \frac{(\sqrt[3]{x^2})^2 - \sqrt[3]{x^2} + 1}{(\sqrt[3]{x^2}+1)((\sqrt[3]{x^2})^2 - \sqrt[3]{x^2} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x} + 1}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \times \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x-y}$$

تسری

۱ هر یک از عبارت‌ها را تا حد ممکن (به عبارت‌های گویا) تجزیه کنید.

$$x^6 - y^6 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2) \quad (\text{الف})$$

$$x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) \quad (\text{ب})$$

پ) $x^2 + y^2$ تجزیه پذیر نیست

۲ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{xy^2} + \sqrt[3]{y^3}}{x-y} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}-2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \frac{\sqrt[3]{x^3} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{x-8} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^3}-\sqrt[3]{xy^2}+\sqrt[3]{y^3}}{x+y} \quad (\text{پ})$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} + \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1} - \frac{5x}{x-1} = \frac{\sqrt{x}+1+2\sqrt{x}-2-5x}{x-1} = \frac{3\sqrt{x}-5x-1}{x-1} \quad (\text{ت})$$

۳ بعضی از ضرب‌های عددی را با استفاده از اتحادها می‌توان به صورت ذهنی حساب کرد. مانند نمونه، بقیه ضرب‌ها را ذهنی انجام

دهید.

$$\text{الف)} \quad 16 \times 14 = (15+1)(15-1) = 15^2 - 1 = 224$$

$$\text{ب)} \quad 105^2 = (100+5)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 5 + 5^2 = 10000 + 1000 + 25 = 11025$$

$$\text{پ)} \quad 1007^2 = (1000+7)^2 = 1000^2 + 2 \times 1000 \times 7 + 7^2 = 1000000 + 14000 + 49 = 1014049$$

$$\text{ت)} \quad 99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$$

۴ کسرهای را گویا و سپس به یک کسر تبدیل کنید.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[8]{x}-1}$$

ابتدا تک تک کسرها را گویا کرده سپس جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} \times \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1} = \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x}-1} = \frac{1}{\sqrt[8]{x}-1} \times \frac{\sqrt[8]{x}+1}{\sqrt[8]{x}+1} = \frac{\sqrt[8]{x}+1}{\sqrt[4]{x}-1} = \frac{\sqrt[8]{x}+1}{\sqrt[4]{x}-1} \times \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1} = \frac{(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$\Rightarrow \text{عبارت} = \frac{1 + (\sqrt{x}+1) + (\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1) + (\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

۵ عبارت $a^6 - 2b^6 + 2a^3b^3$ را تجزیه کنید یا اجازه‌ی مولف سوال را به شکل زیر اصلاح کرده و تجزیه می‌کنم:

$$a^6 - 2b^6 + 2a^3b^3 = \underline{a^6 - a^3b^3} + \underline{2a^3b^3 - 2b^6} = a^3(a^3 - b^3) + 2b^3(a^3 - b^3) = (a^3 - b^3)(a^3 + 2b^3)$$

$$= (a-b)(a^2 + ab + b^2)(a^3 + 2b^3)$$

خواندنی

* سه عدد ۴، ۳ و ۵ را یک سه‌تایی فیثاغورسی می‌نامیم، زیرا

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

یک سه‌تایی دیگر مثال بزنید. چند تا از این گونه سه‌تایی‌ها را می‌توانید شناسایی کنید؟

* (جادوی توان) محاسبات نشان می‌دهد:

$$(1/0.1)^{365} = 37/8$$

$$(0/99)^{365} = 0/0.3$$

چرا اینقدر اختلاف وجود دارد؟ حال $(1/0.1)^{365}$ و $(0/99)^{365}$ را محاسبه و مقایسه کنید.

اگر هر روز اندکی کار خود را نسبت به روز قبل بهتر کنیم، در سال حدود ۴۰ برابر راندمان (بهره‌وری) کار افزایش می‌یابد.

شما هم داستانی در باب توان‌ها بنویسید.

* (مثلث خیا،)

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

چه رابطه‌ای بین ضرایب در بسط اتحادها و سطرهای مثلث خیام وجود دارد؟

ضرایب موجود در بسط $(a+b)^n$ همان اعداد داده شده در سطر $n+1$ مثلث خیام است.

می‌توانید توان چهارم دوجمله‌ای را حساب و ضرایب بسط را مشخص کنید.

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$$

$$= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b)$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$