

تهیه کنندگان:

جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

معادله‌ها و نامعادله‌ها



سد دز، خوزستان



درس اول

معادله درجه دوم و روش‌های
مختلف حل آن

درس دوم

سهمی

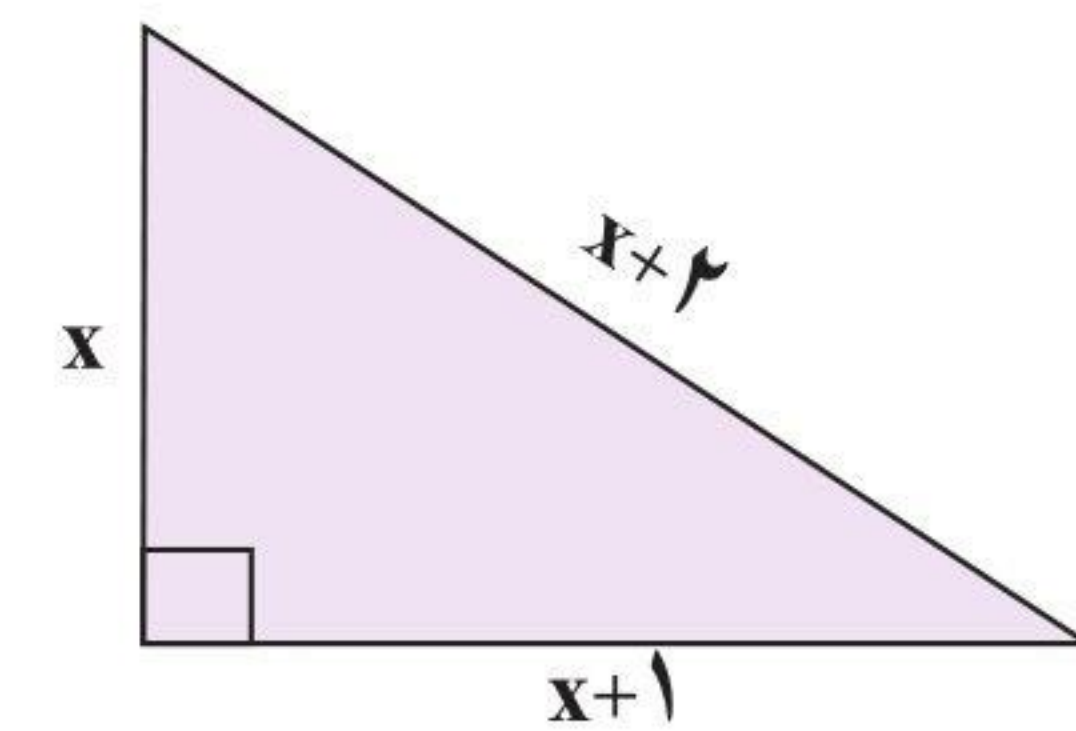
درس سوم

تعیین علامت

سدهای قوسی، سازه‌هایی هستند که هزینه ساخت بسیار بالایی دارند. کاهش هزینه‌ها معمولاً با بهینه‌سازی‌هایی روی منحنی‌هایی انجام می‌شود که سهمی یکی از معروف‌ترین آنهاست.

درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

صبا بعد از حل یک مسئله هندسه به نکته جالبی پی برد. او پی برد که اضلاع مثلث مسئله او، سه عدد متوالی ۳، ۴ و ۵ هستند و این مثلث، قائم الزاویه است (چرا؟).
از خواهر



بزرگ تر خود، دُرسا، سؤال کرد که آیا می‌توان مثلث قائم الزاویه دیگری پیدا کرد که اضلاع آن سه عدد متوالی دیگر باشند؟ برای پاسخ به این سؤال، درسا، مثلث قائم الزاویه‌ای رسم کرد و طول کوچک‌ترین ضلع آن را x و طول اضلاع دیگر را اعداد متوالی بعد از x ، یعنی $x+1$ و $x+2$ در نظر گرفت و به کمک رابطه فیثاغورس، رابطه زیر را بین سه ضلع مثلث به دست آورد:

$$x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$$

اکنون او می‌خواست معادله به دست آمده را حل کند؛ یعنی مقادیری برای x پیدا کند که تساوی بالا را برقرار کنند. برای این کار معادله بالا را ساده کرد و آن را به شکل $x^2 - 2x - 3 = 0$ نوشت.

هر معادله به این صورت را که پس از ساده شدن، بزرگ‌ترین توان متغیر آن ۲ باشد، معادله درجه دوم می‌نامیم.

هر معادله به شکل

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad (a \neq 0)$$

که در آن a ، b و c اعداد حقیقی هستند را یک معادله درجه دوم می‌نامیم.



در این بخش، تعدادی از روش‌های حل این معادله را توضیح می‌دهیم.

حل معادله درجه دوم به روش تجزیه

فعالیت

می‌دانیم که تجزیه یک عبارت به معنای تبدیل آن به حاصل ضرب حداقل دو عبارت است. از جمله تجزیه‌هایی که در حل معادله درجه دوم استفاده می‌شوند، عبارت‌اند از:

(۱) فاکتورگیری:

$$ax^2 + bx = x(ax + b)$$

(۲) تجزیه به کمک اتحاد مزدوج:

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

(۳) تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 3 = 0$ را که درسا در بخش قبل به آن رسید، در نظر بگیرید.

با تجزیه سمت چپ معادله بالا، جای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

ویژگی حاصل ضرب صفر

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB = 0$ ، آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است؛ یعنی:

$$AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

از ویژگی بالا استفاده کنید و جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$(x+1)(x-3)=0 \Rightarrow x+1=0 \text{ یا } x-3=0 \Rightarrow x=-1 \text{ یا } x=3$$

برای اطمینان از صحت جواب‌های حاصل شده، می‌توانیم هر دو جواب به دست آمده را در معادله قرار دهیم و آنها را آزمایش کنیم. یکی از جواب‌ها آزمایش شده است؛ جواب دیگر را آزمایش کنید.

$$x = -1$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$$

$$1 + 2 - 3 = 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$$x = 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$3^2 - 2(3) - 3 = 0$$

$$9 - 6 - 3 = 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

آیا هر دو جواب این معادله می‌توانند طول اضلاع مثلث قائم الزاویه‌ای باشند که قبلاً درباره آن بحث شده است؟ توضیح دهید.

خیر - اضلاع مثلث نمی‌توانند مقدار منفی داشته باشند پس فقط جواب $x = 3$ قابل قبول است.

کار در کلاس

معادله‌های درجه دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید و جواب‌های خود را آزمایش کنید.

الف) $x^2 - 3x = 10$

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$x^2 - 3x = 10 \xrightarrow{x=5} 5^2 - 15 = 10 \Rightarrow 25 - 15 = 10 \Rightarrow 10 = 10 \quad \checkmark$$

$$x^2 - 3x = 10 \xrightarrow{x=-2} (-2)^2 - 3(-2) = 10 \Rightarrow 4 + 6 = 10 \Rightarrow 10 = 10 \quad \checkmark$$

ب) $3t^2 - t = 0$

$$3t^2 - t = 0 \Rightarrow t(3t - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$3t^2 - t = 0 \xrightarrow{t=0} 3(0)^2 - 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$3t^2 - t = 0 \xrightarrow{t=\frac{1}{3}} 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

حل معادله درجه دوم به کمک ریشه‌گیری

فعالیت

معادله درجه دوم $x^2 = 25$ را در نظر بگیرید.

۱ جواب‌های این معادله را به روش تجزیه به دست آورید.

$$x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$$

۲ از دو طرف معادله $x^2 = 25$ ، ریشه‌های دوم را محاسبه می‌کنیم و این معادله را به شکل $x = \pm 5$ می‌نویسیم. این معادله را به روش تجزیه نیز حل کنید و جواب‌های به دست آمده را با این جواب‌ها مقایسه کنید.

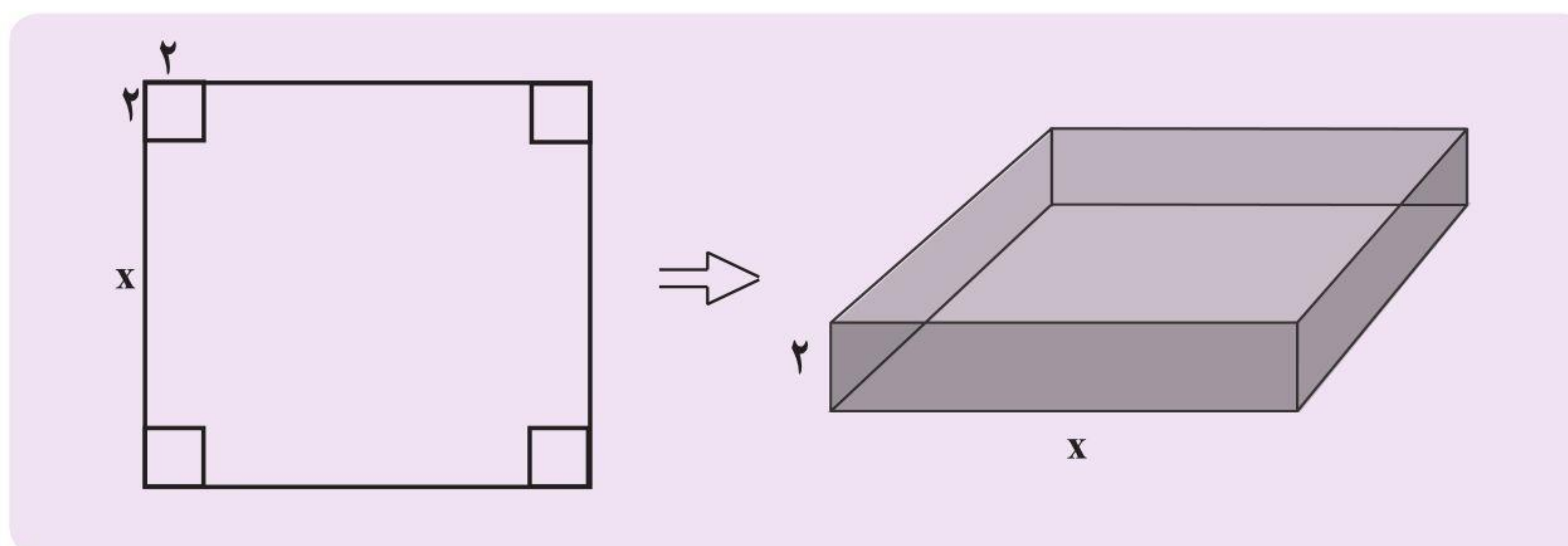
۳ اگر $x^2 = a$ یک معادله درجه دوم باشد که در آن a یک عدد حقیقی است، آیا همیشه می‌توان جواب‌های آن را به صورت $x = \pm \sqrt{a}$ نوشت؟ توضیح دهید.

اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگتر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 = a$ عبارت‌اند از:

$$x = \sqrt{a} \text{ و } x = -\sqrt{a}$$

مثال

با یک دستگاه برش، یک صفحه مقوایی به شکل مربع را برش می‌زنیم. سپس، چهار مربع کوچک در گوشه‌های آن را جدا می‌کنیم. بعد با تا زدن لبه‌ها، یک جعبه می‌سازیم. اگر مربع‌های جداشده به ضلع ۲ سانتی‌متر باشند و بخواهیم حجم این جعبه، 200 سانتی‌متر مکعب باشد، طول اضلاع کاغذهایی را که باید برای این کار انتخاب شوند، به دست آورید.



حل: از مقوایی که در شکل سمت چپ رسم شده، چهار مربع به ضلع ۲ سانتی‌متر جدا می‌کنیم تا جعبه‌ای که سمت راست رسم شده، به دست آید. حجم این جعبه عبارت است از:

$$2x^2 = (2)(x)(x) = \text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول}$$

از آنجا که حجم جعبه، 200 سانتی متر مکعب باید باشد، داریم: $2x^2 = 200$. بنابراین $x^2 = 100$ و با محاسبه ریشه های دوم این معادله، جواب های $x = \pm 10$ به دست می آید. و چون طول نمی تواند منفی باشد، تنها $x = 10$ مورد قبول است و طول ضلع مربع اولیه $14 = 10 + 4 = x + 4$ سانتی متر است.

کار در کلاس

جواب هریک از معادله های زیر را در صورت وجود به روش ریشه گیری به دست آورید.

الف) $5x^2 = 20$

$$\xrightarrow{\div 5} x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \pm 2$$

ب) $t^2 + 7 = 0$

$$\Rightarrow t^2 = -7$$

که این غیر ممکن است

و معادله جواب ندارد.

پ) $(r-2)^2 = 16$

$$\Rightarrow r - 2 = \pm 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r - 2 = 4 \Rightarrow r = 6 \\ r - 2 = -4 \Rightarrow r = -2 \end{cases}$$

حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل

فعالیت

۱ دو جمله ای $x^2 + 6x$ را در نظر بگیرید. چه عددی باید به این دو جمله ای اضافه شود تا چند جمله ای حاصل به شکل مربع کامل نوشته شود؟ جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

اعدادی که در جاهای خالی نوشته اید، چه ارتباطی با شکل روبه رو دارند؟

قطعه ی جدا شده در شکل ۹ قسمت دارد یعنی مربع ۳، و در تساوی فوق ۳ را درون پیرامون و مربع آن یعنی ۹ را در سمت چپ نوشته ایم.

۲ اگر a یک عدد حقیقی باشد، به دو جمله ای $x^2 + ax$ چه جمله ای باید اضافه شود تا به شکل مربع کامل درآید؟ جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

مثال

معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ را به روش مربع کامل حل می کنیم.

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

معادله درجه دوم

$$x^2 - 6x = -4$$

به دو طرف معادله، -4 را اضافه کرده ایم

$$x^2 - 6x + 9 = -4 + 9$$

به دو طرف معادله ... را اضافه کرده ایم تا سمت چپ مربع کامل شود

$$(x-3)^2 = 5$$

سمت چپ را به شکل مربع کامل می نویسیم

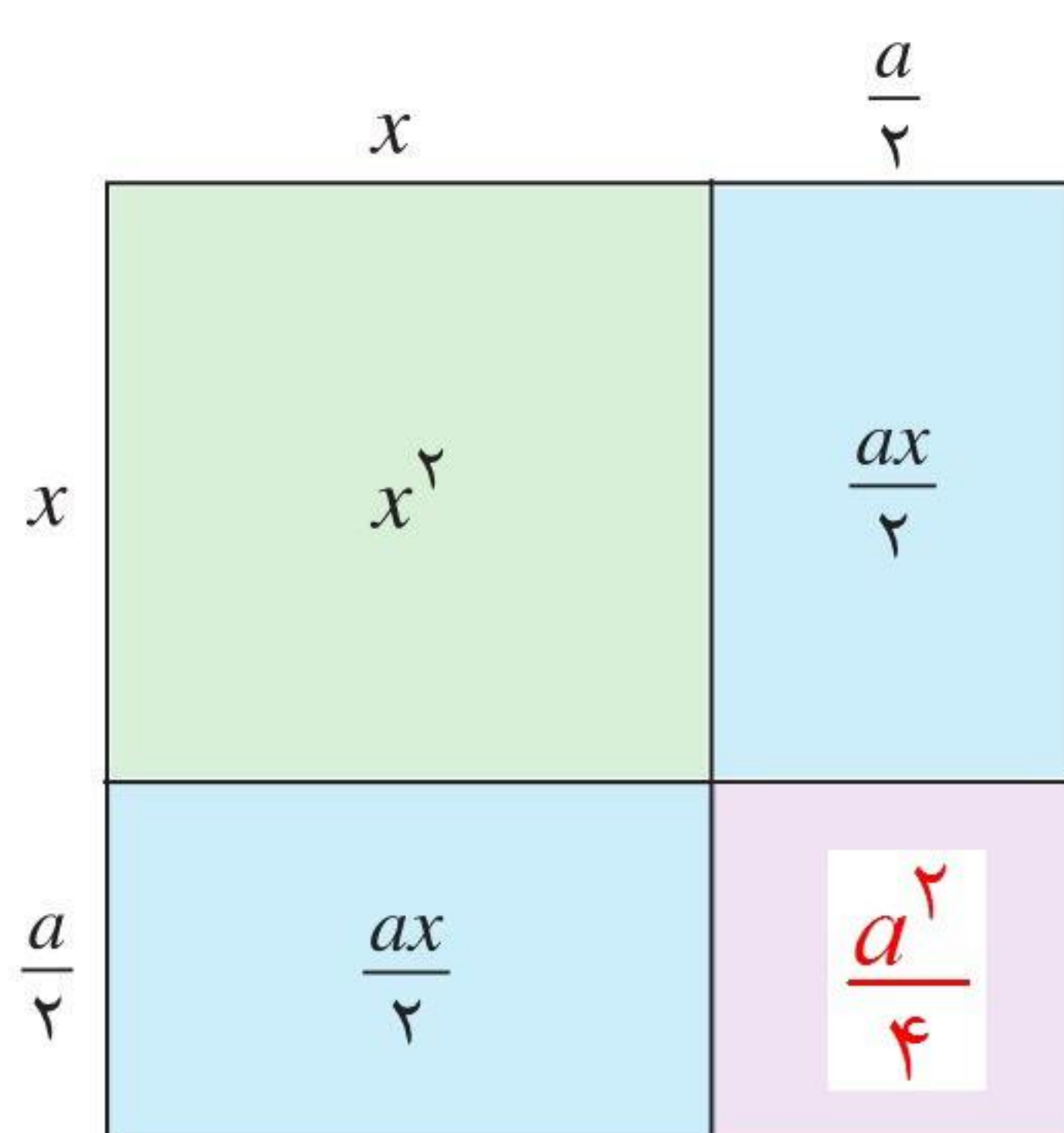
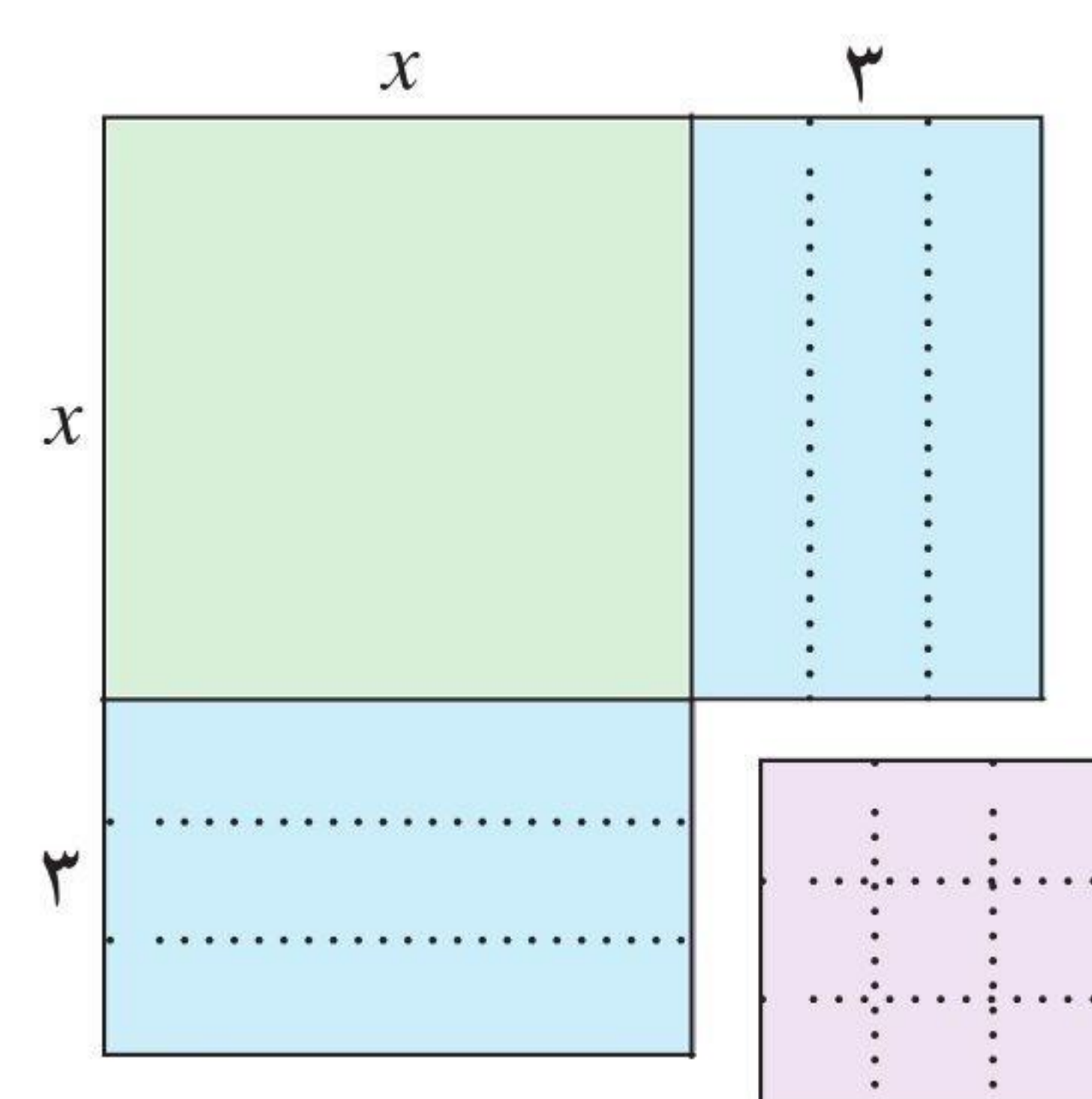
$$x-3 = \pm \sqrt{5}$$

از دو طرف معادله، ریشه دوم می گیریم

$$x = 3 \pm \sqrt{5}$$

به دو طرف معادله عدد ۳ را اضافه کرده ایم

بنابراین جواب ها یا ریشه های این معادله عبارت اند از $3 + \sqrt{5}$ و $3 - \sqrt{5}$.



معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2 + 2x = 24$

$$x^2 + 2x + 1 = 25$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 = 25$$

$$\Rightarrow x + 1 = \pm 5$$

$$\Rightarrow x = 4, \quad x = -6$$

ب) $t^2 + 3t = 3$

$$t^2 + 3t + \frac{9}{4} = 3 + \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{21}{4}$$

$$\Rightarrow t + \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\Rightarrow t = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$$

$$, \quad t = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}$$

پ) $n^2 - 4n + 5 = 0$

$$n^2 - 4n = -5$$

$$\Rightarrow n^2 - 4n + 4 = -5 + 4$$

$$\Rightarrow (n - 2)^2 = -1$$

غیر ممکن است

معادله جواب حقیقی ندارد

ت) $2r^2 + r - 2 = 0$

$$2r^2 + r = 2$$

$$\xrightarrow{\div 2} r^2 + \frac{1}{2}r = 1$$

$$\Rightarrow r^2 + \frac{1}{2}r + \frac{1}{16} = 1 + \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \left(r + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}$$

$$\Rightarrow r + \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$\Rightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی

فعالیت

در بخش‌های قبل، روش‌هایی برای حل معادله‌های درجه دوم فرا گرفته‌اید. اکنون می‌خواهیم یک فرمول کلی برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $a \neq 0$ است، پیدا کنیم.

دانش آموز: آیا با روش مربع کامل می‌توان هر معادله درجه دوم را حل کرد؟
معلم: بله. برای حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ با این روش مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

دو طرف معادله را بر a تقسیم می‌کنیم

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

به دو طرف معادله، $-\frac{c}{a}$ را اضافه کرده‌ایم

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

به دو طرف معادله، $\frac{b^2}{4a^2}$ را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

دو طرف را ساده کرده‌ایم

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad \text{پس: } \Delta = b^2 - 4ac$$

آیا می‌توانید با ریشه دوم گرفتن از دو طرف این معادله، جواب‌های آن را به دست آورید؟

دانش آموز: اگر $\Delta < 0$ باشد، از سمت راست نمی‌توان ریشه دوم گرفت.

معلم: آفرین؛ پس اگر Δ یک عدد منفی باشد، معادله درجه دوم ریشه‌ای ندارد. اگر $\Delta > 0$ باشد، آیا می‌توانید ریشه‌های این معادله را به دست آورید؟

دانش آموز: بله. کافی است از دو طرف معادله $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ ریشه دوم بگیریم:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

دانش آموز: اگر $\Delta = 0$ باشد، آیا این معادله ریشه ای دارد؟

معلم: بله و این ریشه از رابطه زیر به دست می آید:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

دانش آموز: پس در حالت $\Delta = 0$ معادله تنها یک ریشه به صورت $x = -\frac{b}{2a}$ دارد.

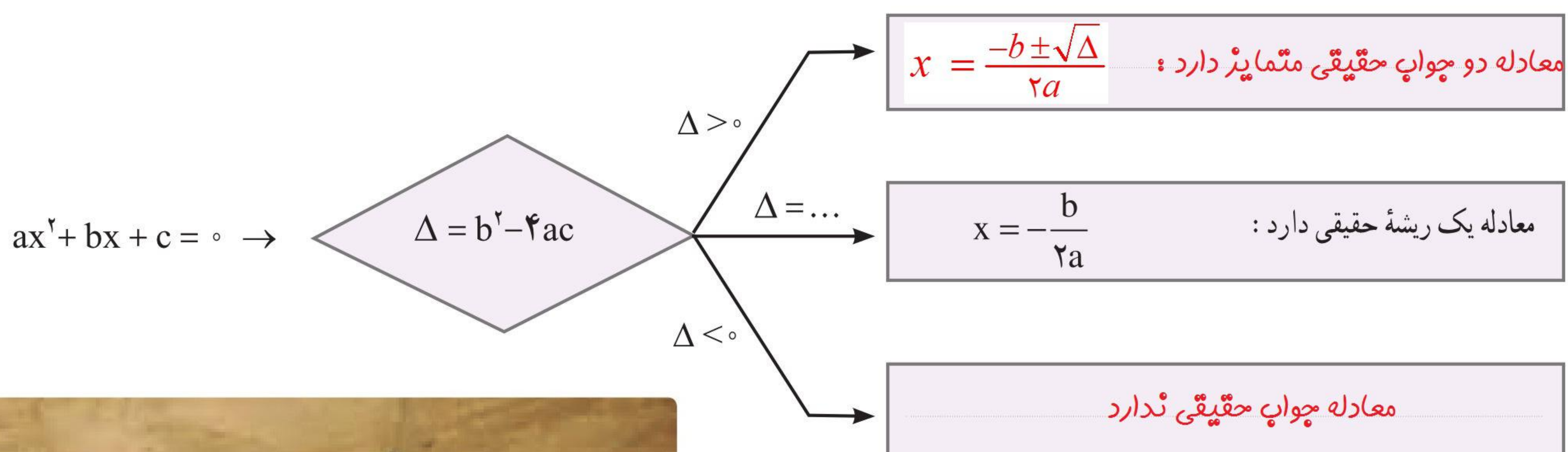
معلم: این ریشه از معادله $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$ به دست آمده است و چون

هر دو معادله $x + \frac{b}{2a} = 0$ و $x + \frac{b}{2a} = 0$ جواب یکسان دارند، به جواب مشترک آنها، ریشه

مضاعف یا ریشه مکرر مرتبه دوم می گوئیم.

کار در کلاس

۱ با توجه به فعالیت بالا، جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.



۲ معادله های زیر را با فرمول کلی حل کنید.

الف) $x^2 - x + 1 = 0$

معادله جواب حقیقی ندارد $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 \Rightarrow$

ب) $-2x^2 + x + 3 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4(-2) \times 3 = 25 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{-4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -1 \end{cases}$

پ) $-x^2 + 4x - 4 = 0$

$\Delta = 16 - 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 0}{-2} = 2$

شهر سوخته، سیستان و بلوچستان

از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ متر مربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.



حل: اگر طول و عرض این مستطیل، برابر با s و t باشند، با توجه به اینکه محیط آن ۵۰ متر است، پس $2(s+t) = 50$. از ساده کردن این معادله به معادله $s+t = 25$ می‌رسیم؛ بنابراین $t = 25 - s$.

از سوی دیگر $st = 144$. با جای گذاری t بر حسب s در این معادله به شکل $s(25-s) = 144$ می‌رسیم که بعد از ساده شدن، معادله درجه دوم $s^2 - 25s + 144 = 0$ به دست می‌آید.

در این معادله $a=1, b=-25, c=144$ ؛ بنابراین

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-25)^2 - 4(1)(144) = 625 - 576 = 49$$

پس $\Delta > 0$ و معادله دو ریشه حقیقی دارد که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} s_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 \pm 7}{2} = \frac{32}{2} = 16 \\ s_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 - 7}{2} = \frac{18}{2} = 9 \end{cases}$$

و چون $t = 25 - s$ ، پس برای t نیز دو جواب به دست می‌آید:

$$\begin{cases} s_1 = 16 \Rightarrow t_1 = 25 - 16 = 9 \\ s_2 = 9 \Rightarrow t_2 = 25 - 9 = 16 \end{cases}$$

بنابراین در هر حالت یک مستطیل با اضلاع ۹ و ۱۶ سانتی متر به دست می‌آید.

تمرین

۱) معادله‌های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

$$1) x^2 - 11x = -10 \Rightarrow x^2 - 11x + 10 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=10 \end{cases} \quad 2) 5t^2 = 20 \Rightarrow 5t^2 - 20 = 0 \Rightarrow 5(t-2)(t+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t-2=0 \Rightarrow t=2 \\ t+2=0 \Rightarrow t=-2 \end{cases}$$

$$3) 5a^2 - 7a = 2a(a-3) \Rightarrow 5a^2 - 7a = 2a^2 - 6a \Rightarrow 3a^2 - a = 0 \Rightarrow a(3a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ 3a-1=0 \Rightarrow a=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$4) 4k^2 - 12k + 8 = 0 \Rightarrow 4(k-1)(k-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k-1=0 \Rightarrow k=1 \\ k-2=0 \Rightarrow k=2 \end{cases}$$

۲) هر یک از معادله‌های زیر را با ریشه دوم گرفتن حل کنید.

$$1) n^2 - 2 = 26 \Rightarrow n^2 = 28 \Rightarrow n = \pm\sqrt{28} = \pm 2\sqrt{7} \quad 2) x^2 + 12 = 3 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow \text{غیر ممکن است و معادله جواب حقیقی ندارد}$$

$$3) (3t-2)^2 = 4 \Rightarrow 3t-2 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} 3t-2=2 \Rightarrow t=\frac{4}{3} \\ 3t-2=-2 \Rightarrow t=0 \end{cases} \quad 4) 3-3k=3k(2k-1) \Rightarrow 3-3k=6k^2-3k \Rightarrow 3=6k^2 \Rightarrow k^2=\frac{1}{2} \Rightarrow k=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۳) معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

$1) x^2 - 6x = 7$ $x^2 - 6x + 9 = 7 + 9$ $\Rightarrow (x-3)^2 = 16$ $\Rightarrow x-3 = \pm 4$ $\Rightarrow \begin{cases} x-3=4 \Rightarrow x=7 \\ x-3=-4 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$	$2) s^2 - 3s + 3 = 0$ $s^2 - 3s = -3$ $\Rightarrow s^2 - 3s + \frac{9}{4} = -3 + \frac{9}{4}$ $\Rightarrow (s - \frac{3}{2})^2 = -\frac{3}{4}$ $\Rightarrow \text{غیر ممکن است}$ $\Rightarrow \text{معادله جواب حقیقی ندارد}$	$3) r^2 + 4r + 4 = 0$ $\Rightarrow (r+2)^2 = 0$ $\Rightarrow r+2 = 0$ $\Rightarrow r = -2$	$4) 2a^2 + 5a - 3 = 0$ $\xrightarrow{\div 2} a^2 + \frac{5}{2}a = \frac{3}{2} \Rightarrow a^2 + \frac{5}{2}a + \frac{25}{16} = \frac{3}{2} + \frac{25}{16}$ $\Rightarrow (a + \frac{5}{4})^2 = \frac{49}{16} \Rightarrow a + \frac{5}{4} = \pm \frac{7}{4}$ $\Rightarrow \begin{cases} a + \frac{5}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ a + \frac{5}{4} = -\frac{7}{4} \Rightarrow a = -3 \end{cases}$
--	--	---	---

هر یک از معادله های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

۴) $4x^2 - 13x + 3 = 0 \xrightarrow{\Delta = 169 - 48 = 121} x = \frac{13 \pm 11}{8} \Rightarrow x = 3, x = \frac{1}{4}$ ۲) $r - r^2 = 3 \Rightarrow r^2 - r + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 12 = -11 \Rightarrow$ معادله جواب حقیقی ندارد

۳) $a^2 + 2\sqrt{3}a = 9 \Rightarrow a^2 + 2\sqrt{3}a - 9 = 0 \xrightarrow{\Delta = 48} a = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ a = -3\sqrt{3} \end{cases}$

۴) $\frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} = 0 \xrightarrow{\times 6} 2t^2 - 3t - 9 = 0 \xrightarrow{\Delta = 81} t = \frac{3 \pm 9}{4} \Rightarrow t = 3, t = -\frac{3}{2}$

هر یک از معادله های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

۱) $2x^2 = 25 \xrightarrow{\div 2} x^2 = 12.5 \Rightarrow x = \pm \sqrt{12.5} = \pm 5\sqrt{5}$

۲) $9 - 6z + z^2 = 0 \Rightarrow (z - 3)^2 = 0 \Rightarrow z - 3 = 0 \Rightarrow z = 3$ ۳) $4a^2 + 3a = 1 \Rightarrow 4a^2 + 3a - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = 25} a = \frac{-3 \pm 5}{8} \Rightarrow a = \frac{1}{4}, a = -1$

۴) $b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0 \xrightarrow{\Delta = 18} b = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}, b = -2\sqrt{2}$

مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید. **گیریم آن دو عدد k و $k + 2$ باشند، بنابراین:**

$k^2 + (k + 2)^2 = 290 \Rightarrow k^2 + k^2 + 4k + 4 = 290 \Rightarrow 2k^2 + 4k - 286 = 0 \xrightarrow{\div 2} k^2 + 2k - 143 = 0 \Rightarrow (k + 13)(k - 11) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} k = -13 \Rightarrow \text{آن دو عدد فرد عبارتند از } -13 \text{ و } -11 \\ k = 11 \Rightarrow \text{آن دو عدد فرد عبارتند از } 11 \text{ و } 13 \end{cases}$

طول یک مستطیل ۳ سانتی متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

غیر قابل قبول $a = -\frac{15}{4}$

عرض مستطیل ۳ و طول آن ۱۵ است $a = 3$

$S = a(4a + 3) = 45 \Rightarrow 4a^2 + 3a - 45 = 0 \xrightarrow{\Delta = 729} a = \frac{-3 \pm 27}{8} \Rightarrow$

اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

$\left. \begin{array}{l} \text{سن برادر کوچک} = x \\ \text{چهار سال بعد} \rightarrow x + 4 \\ \text{سن برادر بزرگ} = x + 4 \\ \text{چهار سال بعد} \rightarrow x + 8 \end{array} \right\} \Rightarrow (x + 4)(x + 8) = 60 \Rightarrow x^2 + 12x + 32 = 60 \Rightarrow x^2 + 12x - 28 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 14) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -14 \text{ غیر قابل قبول چون سن منفی نداریم} \\ x = 2 \Rightarrow \text{برادر کوچک ۲ ساله و برادر بزرگ ۶ ساله اند.} \end{cases}$

یک عکس به اندازه ۱۰ در ۱۵ سانتی متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی متر مربع، قرار دارد. اگر فاصله همه لبه های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید. طبق شکل، طول مستطیل $2x + 15$ و عرض آن $2x + 10$ است. بنابراین طبق فرمول مساحت:

$(2x + 10)(2x + 15) = 300 \Rightarrow 4x^2 + 50x + 150 = 300 \Rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0 \xrightarrow{\div 2} 2x^2 + 25x - 75 = 0$

$\xrightarrow{\Delta = 1225} x = \frac{-25 \pm 35}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = -15 \text{ غیر قابل قبول} \\ x = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{طول قاب عکس برابر ۲۰ و عرض آن برابر ۱۵ می باشد.} \end{cases}$

در یک تیم گان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم های تیم گان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم های این تیم گان را به دست آورید.



اگر تعداد بازی های تیم گان N و تعداد تیم ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی ها به دست آورید.

اگر تعداد تیم ها n، هر تیم با $n - 1$ تیم بازی دارد. پس با توجه به اینکه بین هر دو تیم تنها یک بازی صورت میگیرد و اصطلاحاً رفت و برگشتی نیست،

تعداد کل بازی ها برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ است. بنابراین:

$\frac{n(n-1)}{2} = 45 \Rightarrow n^2 - n = 90 \Rightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Rightarrow (n - 10)(n + 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -9 \text{ غیر قابل قبول} \\ n = 10 \text{ تیم گان مورد نظر دارای ۱۰ تیم است} \end{cases}$

فشار خون نرمال یک شخص مذکر، که بر حسب میلی متر جیوه (mmHg) اندازه گیری می شود، با رابطه $P = 0.006S^2 - 0.02S + 120$ محاسبه می شود که در آن،

P فشار خون نرمال یک فرد با سن S است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی متر جیوه باشد. (از ماشین حساب استفاده کنید.)



$p = 125 \Rightarrow 0.006S^2 - 0.02S + 120 = 125 \Rightarrow 0.006S^2 - 0.02S - 5 = 0 \xrightarrow{\Delta = 0.1204} S = \frac{0.02 \pm 0.3469}{0.012}$

$\Rightarrow \begin{cases} S = 30.575 \text{ شخص مورد نظر تقریباً ۳۰ سال و ۲۰۷ روز سن داشته است.} \\ S = -27.241 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$

توجه: قرار داد کرده ایم که S بر حسب سال است.

درس دوم: سهمی

آیا تاکنون به مسیری که یک اسکی باز در یک مسابقه پرش ارتفاع یا یک گوی آونگ طی می‌کند، دقت کرده‌اید؟ هیچ کدام از این مسیرها، یک خط راست نیستند. مسیر طی شده توسط اسکی باز یا گوی آونگ می‌تواند توسط معادله $y = ax^2 + bx + c$ محاسبه شود که در آن a ، b و c اعداد حقیقی هستند و البته $a \neq 0$ است.

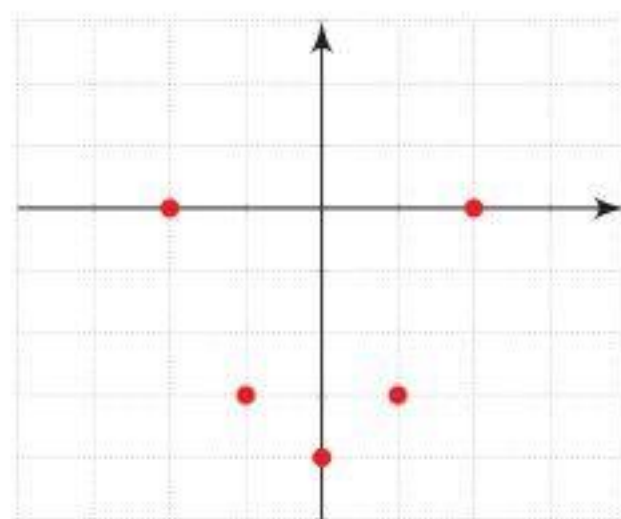
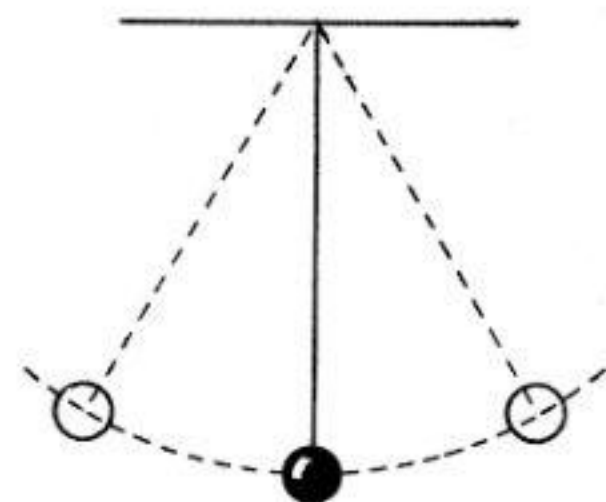


فعالیت

معادله $y = x^2 - 4$ را در نظر بگیرید.

الف) در جدول زیر، چند نقطه که در این معادله صدق می‌کنند، آمده است. این جدول را کامل کنید.

x	$y = x^2 - 4$	(x, y)
-2	$y = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$	$(-2, 0)$
-1	$y = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$	$(-1, -3)$
0	$y = (0)^2 - 4 = 0 - 4 = -4$	$(0, -4)$
1	$y = (1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$	$(1, -3)$
2	$y = (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$	$(2, 0)$



نقاط به دست آمده در جدول بالا را در یک دستگاه مختصات مشخص کرده و آنها را به یکدیگر وصل می‌کنیم (شکل‌های روبه‌رو).

ب) پایین‌ترین نقطه این نمودار چه نقطه‌ای است؟ $(0, -4)$

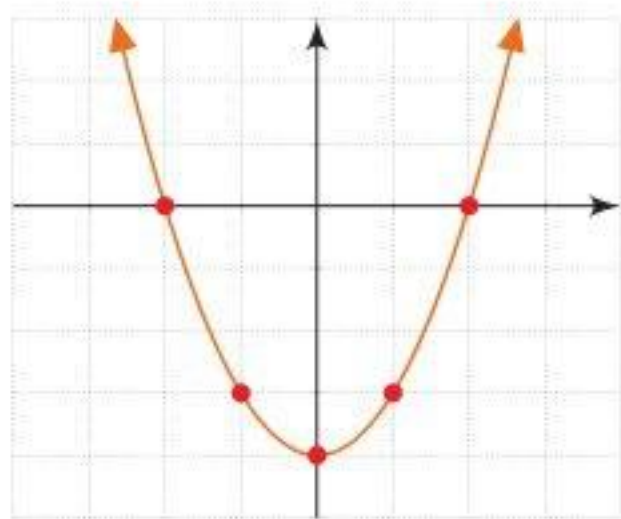
آیا می‌توانید محور تقارن این نمودار را مشخص کنید؟ **محور y ها محور تقارن این شکل است.**

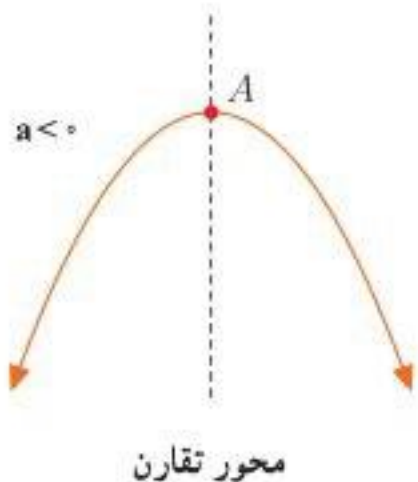
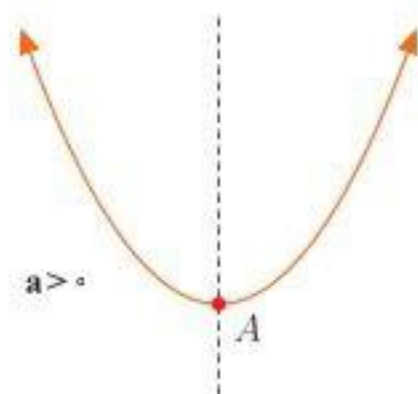
پ) برای رسم این نمودار، از چند نقطه استفاده کرده‌ایم؟ **۵ نقطه**

آیا با نقاط کمتری نیز می‌توانیم این نمودار را رسم کنیم؟ **پله پا سه نقطه نیز امکان پذیر است**

ت) محل برخورد منحنی رسم شده با محور x ها در چه نقطه‌ای است؟

طبق شکل در نقاط $(2, 0)$ و $(-2, 0)$ منحنی با محور x ها برخورد دارد.





نمودار هر معادله به شکل $y = ax^2 + bx + c$ را که در آن a و b و c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$ یک سهمی می‌گوییم که به یکی از دو صورت مقابل است:

نقطه A را در شکل‌های مقابل رأس سهمی می‌گوییم.
اگر $a > 0$ باشد، A پایین‌ترین نقطه سهمی و اگر $a < 0$ باشد، A بالاترین نقطه سهمی است.
همچنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن سهمی نامیده می‌شود.

فعالیت

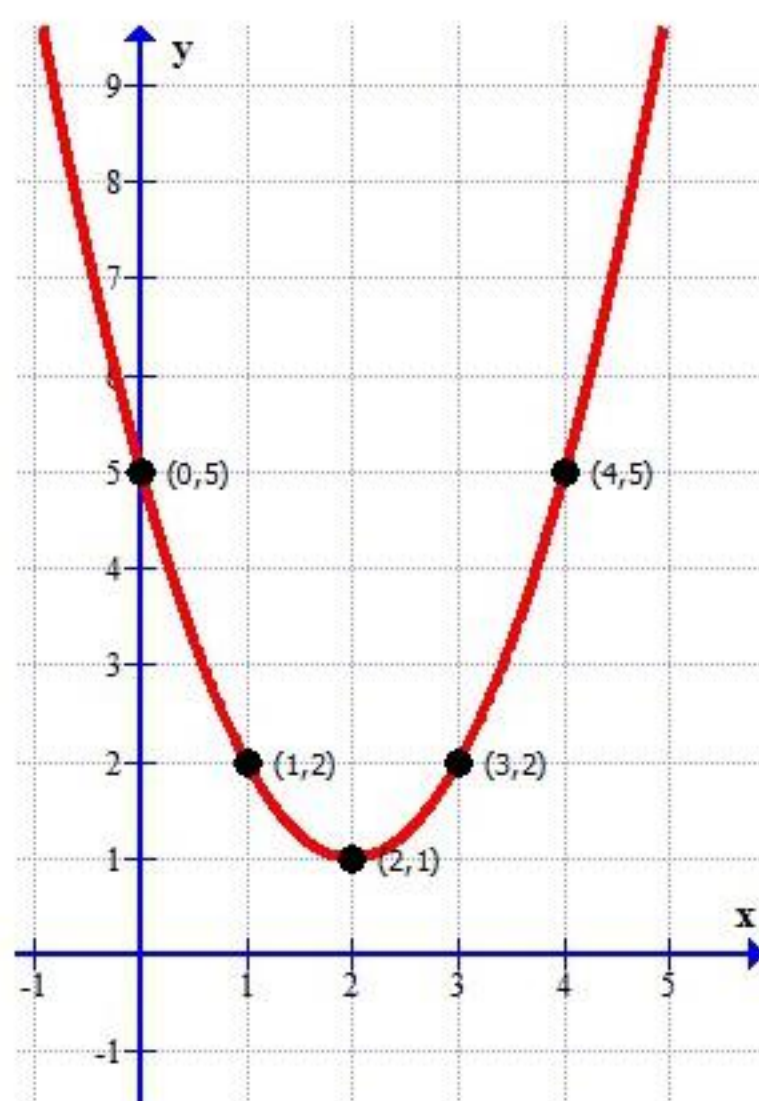
معادله یک سهمی به صورت $y = x^2 - 4x + 5$ است.

الف سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید.

$$y = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow y = (x - 2)^2 + 1$$

ب ریشه عبارت داخل پرانتز را به دست آورید و آن را در ردیف وسط جدول زیر قرار دهید. جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$



x	$y = x^2 - 4x + 5$	(x, y)
0	$y = 0^2 - 4 \times 0 + 5 = 5$	$(0, 5)$
1	$y = 1^2 - 4 \times 1 + 5 = 2$	$(1, 2)$
2	$y = 2^2 - 4 \times 2 + 5 = 1$	$(2, 1)$
3	$y = 3^2 - 4 \times 3 + 5 = 2$	$(3, 2)$
4	$y = 4^2 - 4 \times 4 + 5 = 5$	$(4, 5)$

پ پنج نقطه حاصل شده در جدول بالا را به یکدیگر وصل کنید تا این سهمی رسم شود.

ت آیا می‌توانید پایین‌ترین نقطه این سهمی را از معادله آن به شکل $y = (x - 2)^2 + 1$ به دست آورید؟

طول این نقطه عبارت درون پرانتز است یعنی ۲

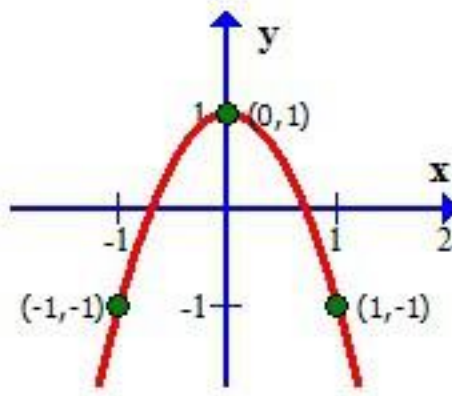
و عرض آن همان عدد تنهای بیرون پرانتز است یعنی ۱

هر سهمی به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است، رأسی به مختصات (h, k) و خط تقارنی با معادله $x = h$ دارد.

کار در کلاس

۱ در هر یک از سهمی‌های زیر، رأس را مشخص و سپس آن را رسم کنید.

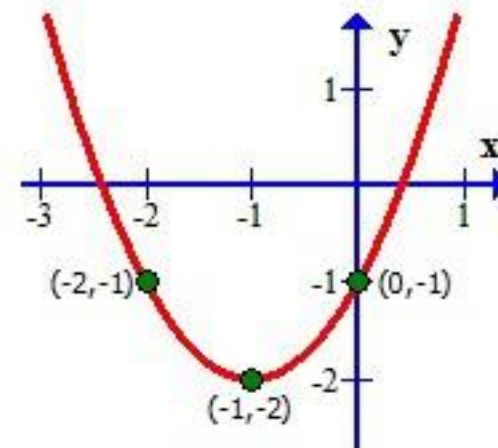
ب) $y = -2x^2 + 1$ رأس سهمی نقطه‌ی $(0, 1)$ است.



x	y
0	1
-1	-1
1	-1

الف) $y = (x+1)^2 - 2$

رأس سهمی نقطه‌ی $(-1, -2)$ است.



x	y
-1	-2
-2	-1
0	-1

فعالیت

معادله سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید. الف سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید و نشان دهید:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c \Rightarrow y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

$$\Rightarrow y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \Rightarrow y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

ب با استفاده از قسمت قبل، نشان دهید که رأس این سهمی، نقطه $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ و خط تقارن آن نیز $x = -\frac{b}{2a}$ است.

رأس سهمی $S\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ ، محور تقارن $x = -\frac{b}{2a}$

$$y = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

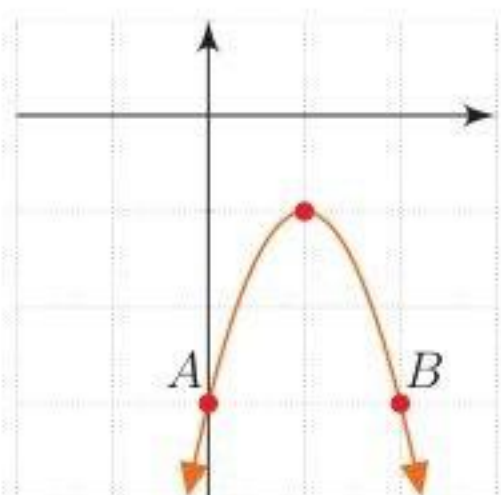
مثال

سهمی $y = -2x^2 + 4x - 3$ را رسم می‌کنیم.

در این سهمی $a = -2$ ، $b = 4$ و $c = -3$ است. مختصات رأس سهمی را به دست می‌آوریم.

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{-4} = 1$$

اکنون در جدول زیر، سه نقطه از آن را پیدا می‌کنیم.



x	$y = -2x^2 + 4x - 3$	(x, y)
0	$-2(0)^2 + 4(0) - 3 = -3$	(0, -3)
1	$-2(1)^2 + 4(1) - 3 = -1$	(1, -1)
2	$-2(2)^2 + 4(2) - 3 = -3$	(2, -3)

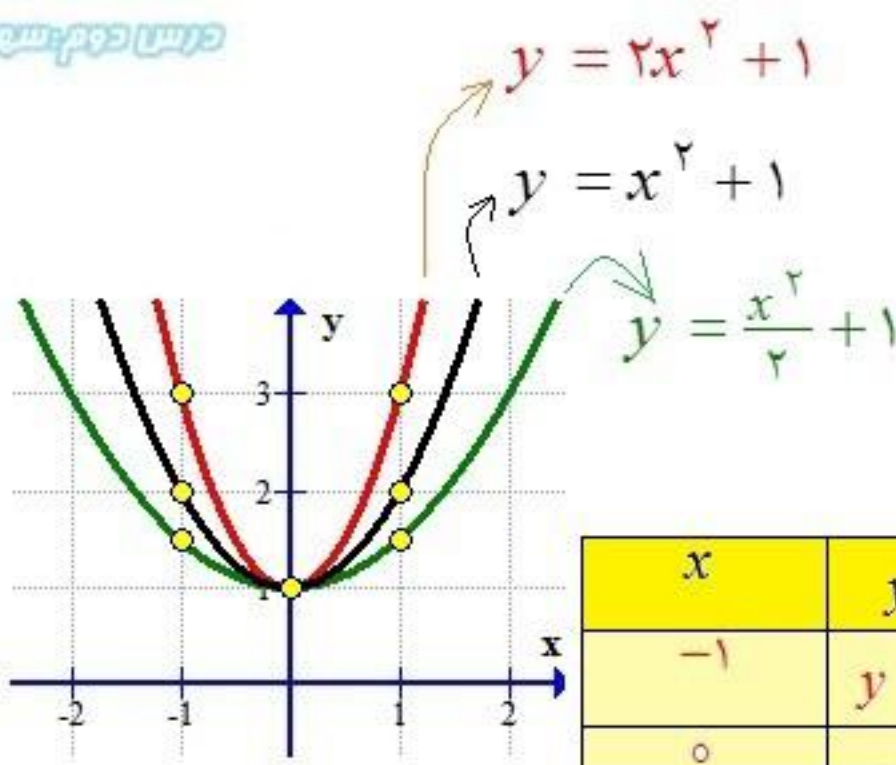
بنابراین نمودار این سهمی به صورت مقابل خواهد بود.

دقت کنید نقاط A و B از این سهمی که عرض یکسان دارند، نسبت به خط تقارن یعنی خط $x = 1$ قرینه‌اند.

۱- عرض رأس سهمی یعنی $\frac{4ac - b^2}{4a}$ را می‌توانید از قرار دادن $x = -\frac{b}{2a}$ در معادله سهمی به دست آورید.

معادله دو سهمی به صورت $y = \frac{x^2}{2} + 1$ و $y = 2x^2 + 1$ است.

الف مختصات رأس و دو نقطه دیگر از این دو سهمی را در جدول زیر مشخص کنید و سپس نمودار هر دو سهمی را در شکل مقابل رسم کنید و نشان دهید که مختصات رأس هر دو سهمی نقطه $A(0, 1)$ است.



x	$y = 2x^2 + 1$	(x, y)
-1	$y = 2(-1)^2 + 1$	$(-1, 3)$
0	$y = 2(0)^2 + 1$	$(0, 1)$
1	$y = 2(1)^2 + 1$	$(1, 3)$

x	$y = \frac{x^2}{2} + 1$	(x, y)
-1	$y = \frac{(-1)^2}{2} + 1$	$(-1, \frac{3}{2})$
0	$y = \frac{(0)^2}{2} + 1$	$(0, 1)$
1	$y = \frac{(1)^2}{2} + 1$	$(1, \frac{3}{2})$

ب معادله سهمی دیگری را که نقطه A رأس آن است، بنویسید و آن را در دستگاه بالا رسم کنید.

پ ضرایب x^2 در معادلات سهمی‌هایی که رسم شده‌اند، چه نقشی در نمودار آنها داشته است؟

اگر ضریب x^2 مثبت باشد، باز می‌شود آن دهانه‌ی سهمی تنگ‌تر می‌شود.

تمرین

۱ نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline -2 & -4 \\ 0 & -4 \\ 1 & -9/2 \end{array}$$

ت) $y = \frac{x^2}{2} + x - 4$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & 1/4 \\ 2 & 0 \end{array}$$

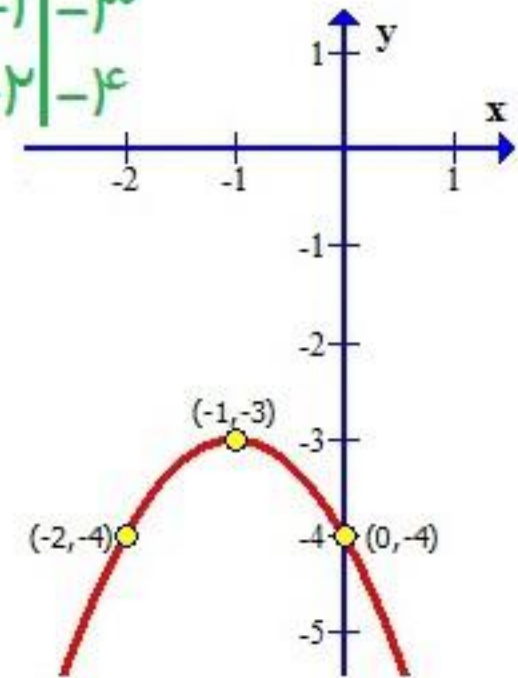
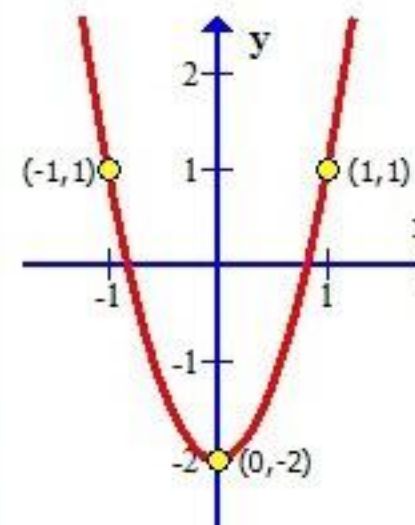
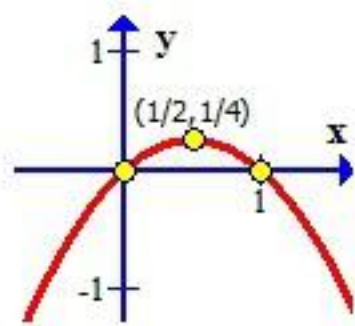
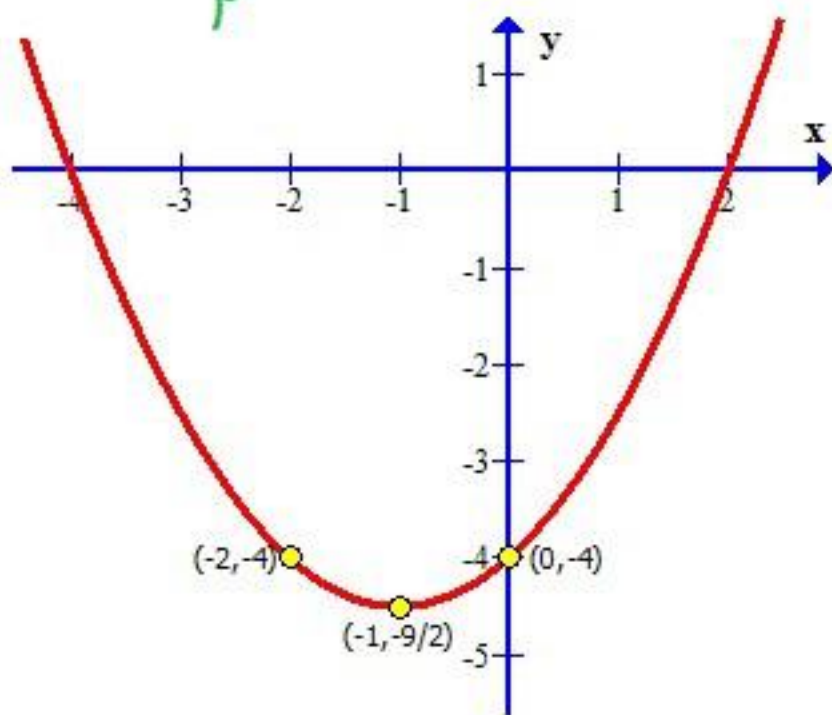
پ) $y = x - x^2$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{array}$$

ب) $y = 3x^2 - 2$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline -2 & -4 \\ -1 & -3 \\ 0 & -4 \end{array}$$

الف) $y = -(x+1)^2 - 3$



۲ اگر $(-2, 5)$ و $(0, 5)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست آورید.

با توجه به اینکه عرض نقاط یکسان است این دو نقطه نسبت به محور تقارن سهمی قرینه‌ی یکدیگرند، به عبارت دیگر محور تقارن از وسط طول‌های این دو نقطه می‌گذرد

$$x = \frac{-2+0}{2} \Rightarrow x = -1$$

معادله خط تقارن $x = -1$

۳ نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور x ها را در نقاط به طول ۱ و ۲ قطع کرده است. معادله این سهمی را بنویسید

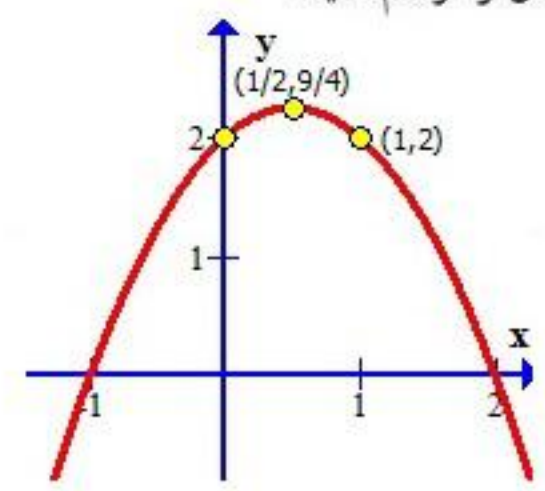
$$(0, 2) \Rightarrow 2 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 2 \quad (-1, 0) \Rightarrow 0 = a - b + 2 \Rightarrow a - b = -2$$

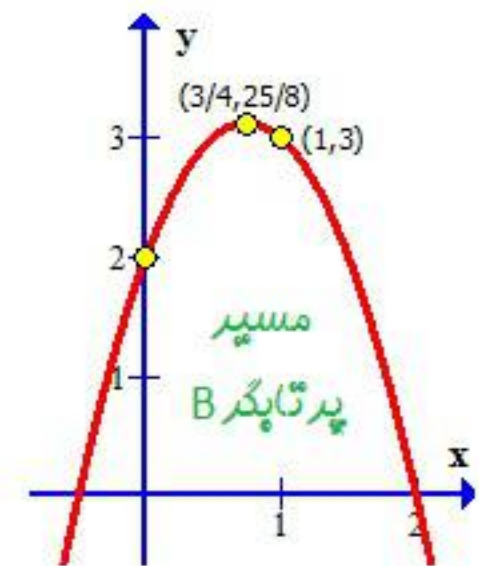
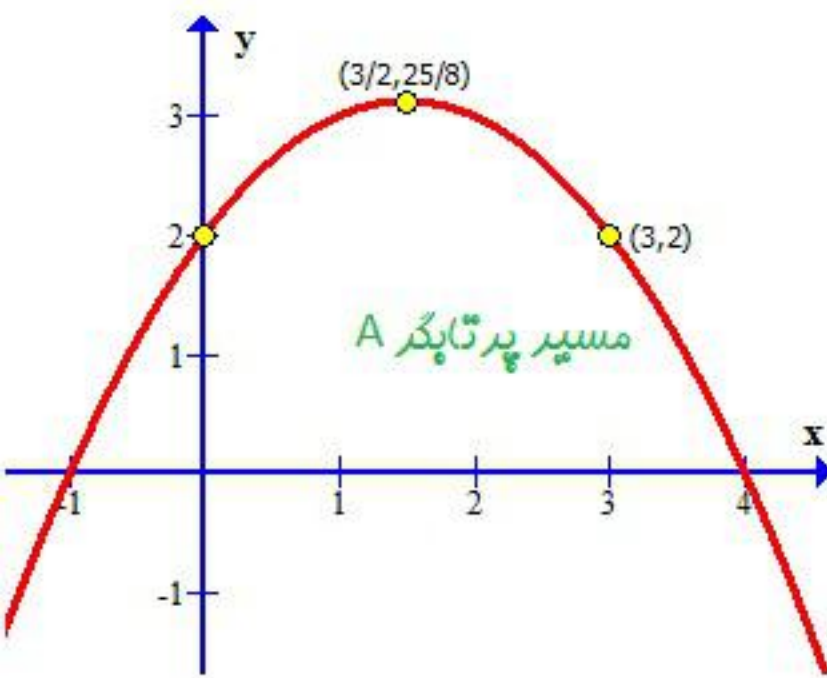
$$(2, 0) \Rightarrow 0 = 4a + 2b + 2 \xrightarrow{\div 2} 2a + b = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = -2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow -2 + b = -1 \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow \text{معادله سهمی: } y = -x^2 + x + 2$$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{array}$$





۴ دو پرتابگر وزنه در یک مسابقه ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت α و β که $\alpha < \beta$ است، پرتاب کرده‌اند. پرتابگر A، زاویه α را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطه $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2$ به دست می‌آید. پرتابگر B نیز زاویه β را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطه $y = -2x^2 + 3x + 2$ به دست می‌آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی شده، بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور x ها در چه نقاطی است؟ کدام یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟

پ) کدام یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازه آنها را مشخص کنید.

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2 = 0 \xrightarrow{\times 2} -x^2 + 3x + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta=25} x = -1, x = 4$$

محل برخورد وزنه A با زمین در نقاط -1 و 4 بوده یعنی 5 متر مسافت پیموده است

$$-2x^2 + 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta=25} x = -\frac{1}{2}, x = 2$$

محل برخورد وزنه B با زمین در نقاط $-\frac{1}{2}$ و 2 بوده یعنی $\frac{5}{2}$ مسافت پیموده است

بنابراین پرتابگر A مسافت بیشتری پیموده است.

پ) میزان ارتفاع، همان عرض نقطه ی راس سهمی است که در این مورد هر دو عرض یکسان است پس ارتفاع یکسانی پیموده شده است. یعنی ارتفاع پیموده شده ی آنها $\frac{25}{8}$ است.

طوف سی سخت - کهگیلویه و بویر احمد



درس سوم: تعیین علامت

در یک شرکت تولیدی، سود حاصل از رابطه $P(x) = 5x - 200$ به دست می‌آید که در آن x تعداد کالای تولید شده است. جدول زیر، سود این شرکت را به ازای چند مقدار x نشان می‌دهد.

تعداد کالای تولید شده (x)	۱۰	۲۰	۴۰	۵۰	۱۰۰
سود حاصله $P(x) = 5x - 200$	-۱۵۰	-۱۰۰	۰	۵۰	۳۰۰

همان‌طور که از این جدول استنباط می‌شود، با تولید ۴۰ کالا، این شرکت هیچ سودی نخواهد داشت و اگر بیشتر از ۴۰ کالا تولید شود، شرکت به سوددهی می‌رسد؛ در حالی که با تولید کمتر از این تعداد کالا، این شرکت، سود منفی (زیان) خواهد داشت. علامت $P(x)$ برای x های مختلف از جدول زیر به دست می‌آید.

x	$x < 40$	۴۰	$x > 40$
$P(x)$	-	۰	+

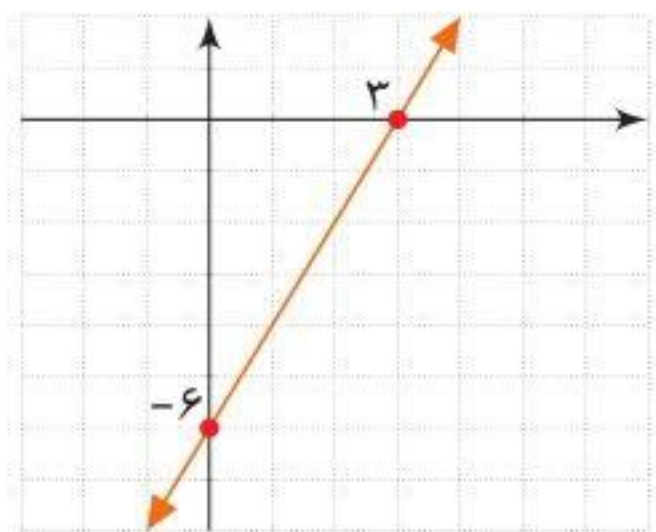
حل بسیاری از مسائل، نیازمند یافتن علامت یک عبارت خاص است که باید آن را تعیین علامت کرد.

تعیین علامت چند جمله‌ای درجه اول

فعالیت

۱ نمودار خط $y = 2x - 6$ در شکل مقابل رسم شده است. با استفاده از آن، علامت y را در جدول زیر بنویسید.

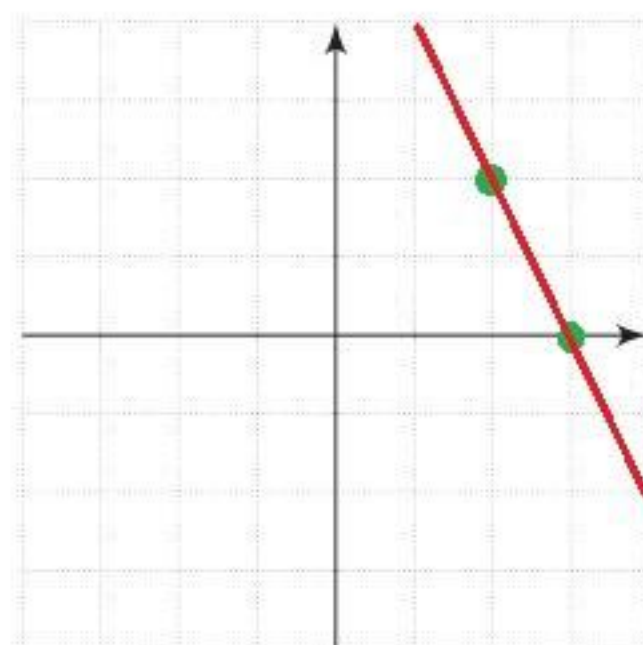
x	$x < 3$	۳	$x > 3$
$y = 2x - 6$	-	۰	+



۲ نمودار خط $y = -2x + 6$ را در شکل مقابل رسم کنید و جدول زیر که علامت y را برای x های مختلف تعیین می کند، کامل کنید.

فصل ۴: معادله ها و نامعادله ها

x	$x < ۳$	۳	$x > ۳$
$y = -2x + 6$	+	۰	-

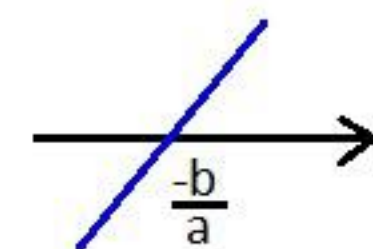


$$\begin{array}{r} x \ y \\ ۳ \ ۲ \\ ۳ \ ۰ \end{array}$$

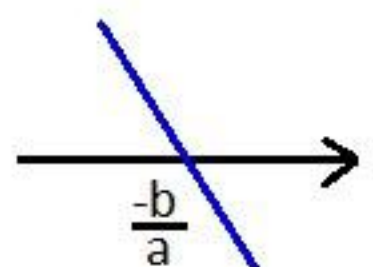
۳ در دو قسمت بالا علامت عددی که ضریب x است، چه تفاوتی در جدول تعیین علامت این خطوط ایجاد کرده است؟

اگر ضریب x مثبت باشد علامت قبل از ریشه منفی و بعد از آن مثبت است
اگر ضریب x منفی شود، علامت ها عکس خواهد شد، یعنی قبل از ریشه مثبت و بعد از آن منفی است.

۴ نشان دهید که علامت عبارت $y = ax + b$ ، برای x های مختلف از جدول زیر تعیین می شود.



اگر a مثبت باشد نمودار حالتی از این نوع دارد (شکل مقابل) با توجه به شکل، قبل از ریشه منفی و بعد از آن مثبت است یعنی قبل از ریشه مخالف علامت a و بعد از آن موافق علامت a است.



اگر a منفی باشد نمودار حالتی از این نوع دارد (شکل مقابل) با توجه به شکل، قبل از ریشه مثبت و بعد از آن منفی است یعنی قبل از ریشه مخالف علامت a و بعد از آن موافق علامت a است.

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$y = ax + b$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

مثال

عبارت $y = 5x - 2$ را تعیین علامت می کنیم.

ریشه عبارت $5x - 2$ از معادله $5x - 2 = 0$ به دست می آید که برابر $x = \frac{2}{5}$ است.

با توجه به اینکه علامت ضریب x ؛ یعنی $a = 5$ ، مثبت است، طبق جدول بالا، جدول تعیین علامت به صورت زیر است:

x	$x < \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$x > \frac{2}{5}$
$y = 5x - 2$	-	۰	+

مقدار y را برای $x = 3$ و $x = -1$ به دست آورید و صحت علامت اعداد به دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

$$x = -1 \Rightarrow y = 5(-1) - 2 = -7 \rightarrow \text{منفی}$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 5(3) - 2 = 13 \rightarrow \text{مثبت}$$

علامت عبارت $A = (2x-1)(3-x)$ را برای x های مختلف تعیین می کنیم. جدول تعیین علامت برای هر کدام از عبارت های $2x-1$ و $3-x$ به صورت زیر است:

x	$x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$	x	$x < 3$	3	$x > 3$
$2x-1$	-	°	+	$3-x$	+	°	-

اطلاعات این دو جدول را در یک جدول به صورت زیر می نویسیم:

x	$x > \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 3$	3	$x > 3$
$2x-1$	-	°	+	+	+
$3-x$	+	°	+	-	-

بنابراین در سه ناحیه بالا که با رنگ های مختلف نشان داده شده، علامت هر کدام از این دو عبارت مشخص شده است. مثلاً برای $x > 3$ ، عبارت $2x-1$ مثبت است؛ ولی $3-x$ منفی می باشد، پس علامت عبارت حاصل ضرب آنها، منفی خواهد بود. با بحث مشابه، برای دو ناحیه دیگر، جدول تعیین علامت $A = (2x-1)(3-x)$ به صورت زیر است^۱.

x	$\frac{1}{2}$				3
$2x-1$	-	o	+		+
$3-x$	+		+	o	-
A	-	o	+	o	-

دقت کنید که روی ستون ها نیز قاعده ضرب انجام شده است.

مقدار A را برای $x = 0$ و $x = 4$ به دست آورید و صحت علامت مقادیر به دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

$$x = 0 \Rightarrow y = (0-1)(3-0) = -3 \rightarrow \text{منفی} \quad x = 4 \Rightarrow y = (4-1)(3-4) = -7 \rightarrow \text{منفی}$$

کار در کلاس هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

الف $A = (3x+1)(x-2)$

x	$-\frac{1}{3}$	2
$3x+1$	-	+
$x-2$	-	-
A	+	-

ب $B = (2x-3)^2$

x	$\frac{3}{2}$
$B = (2x - 3)^2$	+ ° +

ت $D = \frac{x-1}{5-2x}$

x	$\frac{\partial}{\partial x}$			
$x - 1$	-	0	+	+
$\partial - 2x$	+	+	0	-
D	-	0	+	0

ب $C = x^2(7-x)$

X	0	Y
x^2	-	+
$Y - X$	+	-
C	-	-

۱- از نوشتن حدود x در جدول تعیین علامت، صرف نظر می کنیم.

۲- تقسیم دو علامت با ضرب آنها نتیجه مشابهی دارد. همچنین حاصل $\frac{a}{b}$ است، قابل محاسبه نیست و به آن تعریف نشده می گوئیم. ($a \in \mathbb{R}$)

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم

چند جمله‌ای درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ را در نظر می‌گیریم که در آن a, b, c اعداد حقیقی‌اند و $a \neq 0$ است. برای حل معادله $P(x) = 0$ به شیوه مربع کامل، $P(x)$ را به شکل روبه‌رو می‌نویسیم.

$$P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

که در آن، $\Delta = b^2 - 4ac$ و می‌دانیم که تعداد ریشه‌های معادله $P(x) = 0$ به علامت Δ بستگی دارد. با انجام فعالیت زیر علامت $P(x)$ را در حالت‌های مختلف به دست می‌آوریم.

فعالیت

۱ فرض کنید که معادله $P(x) = 0$ دو ریشه متمایز x_1 و x_2 ($x_1 < x_2$) داشته و به شکل $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ تجزیه شده باشد. با تکمیل جدول زیر، علامت $P(x)$ را برای x ‌های مختلف تعیین کنید.

x	x_1	x_2
$x - x_1$	-	+
$x - x_2$	-	+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	+
$P(x)$	موافق علامت a	مخالف علامت a

۲ اگر معادله $P(x) = 0$ ریشه مضاعف برابر با x_1 داشته باشد، می‌توانیم $P(x)$ را به شکل $P(x) = a(x - x_1)^2$ بنویسیم. با تکمیل جدول زیر، علامت $P(x)$ را برای x ‌های مختلف تعیین کنید.

x	x_1
$(x - x_1)^2$	+
$P(x)$	موافق علامت a

۳ اکنون فرض کنید $\Delta < 0$ باشد، در این صورت معادله $P(x) = 0$ ریشه حقیقی ندارد. با توجه به اینکه $P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ علامت $P(x)$ را در جدول زیر تعیین کنید.

x	برای هر $x \in \mathbb{R}$
$P(x)$	موافق علامت a

۴ با توجه به قسمت بالا، مشخص کنید اگر $P(x)$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، مثبت باشد، a و Δ چه علامتی دارند؟ $a > 0$ ، $\Delta < 0$ برای وقتی که $P(x)$ منفی است، نیز علامت a و Δ را تعیین کنید. $a < 0$ ، $\Delta < 0$

مثال

عبارت $A = 2x^2 - x - 3$ را تعیین علامت می‌کنیم. ابتدا ریشه‌های معادله $A = 0$ را در صورت وجود، به دست می‌آوریم.

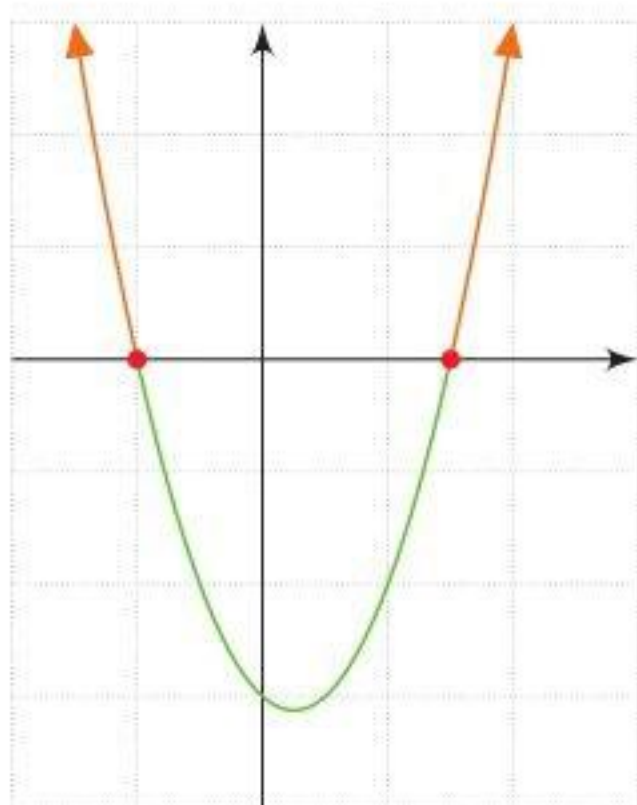
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-3) = 1 + 24 = 25$$

پس معادله $A = 0$ دو ریشه متمایز به صورت زیر دارد:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{4} = -1$$

با توجه به اینکه $a = 2$ است، بنابراین علامت $P(x)$ طبق فعالیت بالا به صورت زیر مشخص می‌شود:

x	$-\frac{3}{2}$			-1	$\frac{3}{2}$		
P(x)	+	+	+	-	-	-	+



نمودار سهمی $y = 2x^2 - x - 3$ در شکل مقابل رسم شده است. به کمک نمودار نیز به سادگی می‌توان علامت y را برای x های مختلف تعیین کرد. برای $x > \frac{3}{2}$ و $x < -1$ ، نمودار بالای محور x هاست؛ پس y علامت مثبت دارد و برای $-1 < x < \frac{3}{2}$ ، نمودار پایین محور x هاست؛ پس علامت y منفی است.

مثال

عبارت $P(x) = \frac{x(x-3)^2}{x^2+x-2}$ را تعیین علامت می‌کنیم.

هریک از عبارت‌های موجود در صورت و مخرج را تعیین علامت می‌کنیم و نتایج را در یک جدول می‌نویسیم.

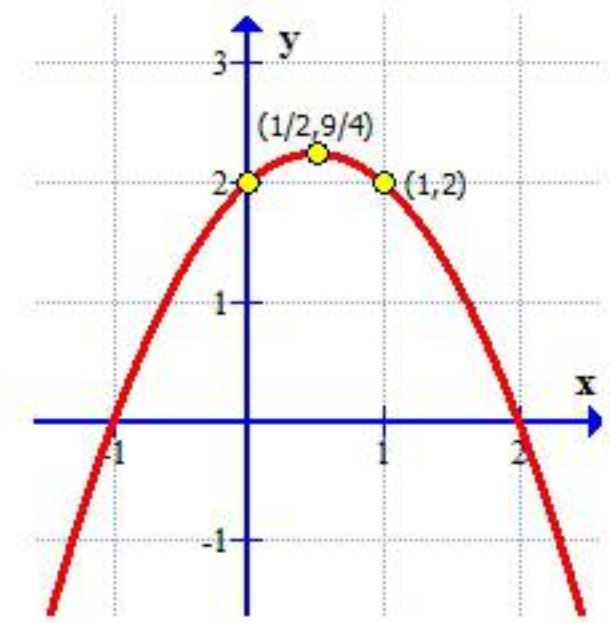
$$\begin{cases} x = 0 \\ (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow x=-2 \text{ یا } x=1 \end{cases}$$

x	-2		0	1	3	
x	-	-	+	+	+	+
$(x-3)^2$	+	+	+	+	+	+
x^2+x-2	+	-	-	+	+	+
P(x)	-	+	-	+	+	+

تعریف نشده

تعریف نشده

۱ چندجمله‌ای $y = -x^2 + x + 2$ را با محاسبه ریشه‌ها، در یک جدول تعیین علامت کنید؛ سپس با رسم آن، صحت علامت‌های به دست آمده در جدول را با نمودار، بررسی کنید.



x		-1		2	
y	-	0	+	0	-

۲ عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

$$-x^2 + 6x - 9 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} x = 3 \quad B = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3} \text{ (ب)}$$

$$x^2 + x + 3 = 0 \xrightarrow{\Delta=-11} \text{محول ندارد}$$

		3	
$-x^2 + 6x - 9$	-	0	-
$x^2 + x + 3$	+		+
B	-	0	-

الف) $A = (x^2 - 9)(3x - 1)$

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

		-3		1/3		3	
$x^2 - 9$	+	0	-		-	0	+
$3x - 1$	-		-	0	+		+
A	-	0	+	0	-	0	+

نامعادله

در سال گذشته با مفهوم نامعادله آشنا شده‌اید. اگر A و B دو عبارت جبری باشند، نامعادله‌هایی که با این دو عبارت ساخته می‌شوند، به صورت زیرند:

نامعادله	می‌خوانیم
$A < B$	A کوچک‌تر از B است.
$A \leq B$	A کوچک‌تر یا مساوی B است.
$A > B$	A بزرگ‌تر از B است.
$A \geq B$	A بزرگ‌تر یا مساوی B است.

برای حل یک نامعادله می‌توانیم از خواص زیر استفاده کنیم:

۱- خاصیت جمع:

برای عبارت‌های جبری A، B و C، اگر $A < B$ سپس $A + C < B + C$.

۲- خاصیت ضرب

الف) اگر $C > 0$ و $A > B$ سپس $AC > BC$.

ب) اگر $C < 0$ و $A > B$ سپس $AC < BC$.

نامعادله $5x - 1 \geq 3x - 7$ را حل می‌کنیم.

$$5x - 1 \geq 3x - 7$$

$$5x - 1 - 3x \geq 3x - 7 - 3x$$

به دو طرف نامعادله، $-3x$ را اضافه می‌کنیم.

$$2x - 1 \geq -7$$

$$2x \geq -6$$

دو طرف نامعادله را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم.

$$x \geq -3$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$ که با نماد بازه به شکل $[-3, +\infty)$ نوشته می‌شود. نمایش هندسی این مجموعه به صورت زیر است:

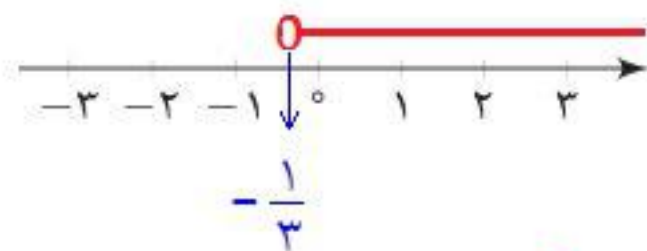


فعالیت

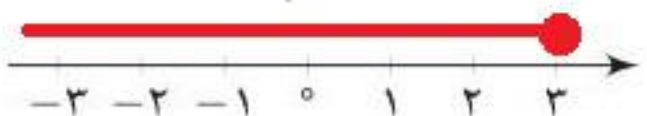
فرض کنید x متغیری باشد که همزمان در دو نامعادله زیر صدق می‌کند:

$$-2 < 3x - 1, 3x - 1 \leq 8$$

۱ هر کدام از نامعادله‌های بالا را حل کنید و مجموعه جواب‌های به دست آمده را روی محور مقابل آنها رسم کنید.

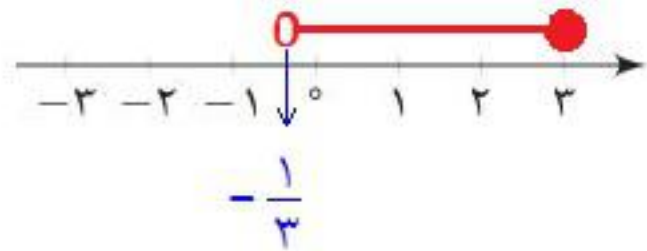


$$-2 < 3x - 1 \xrightarrow{+1} -1 < 3x \xrightarrow{\div 3} -\frac{1}{3} < x$$



$$3x - 1 \leq 8 \xrightarrow{+1} 3x \leq 9 \xrightarrow{\div 3} x \leq 3$$

به خاطر وجود «و» بین دو نامعادله، اشتراک مجموعه جواب‌های به دست آمده را مشخص و آن را روی محور مقابل رسم کنید.



۲ می‌توانیم دو نامعادله فوق را ترکیب کنیم و به شکل یک نامعادله دوگانه به صورت $-2 < 3x - 1 \leq 8$ بنویسیم. از خواص جمع و ضرب نامساوی‌ها استفاده کنید و این نامعادله دوگانه را حل کنید:

به دو نامعادله $+1$ را اضافه می‌کنیم. $-2 < 3x - 1 \leq 8$

دو نامعادله را در $\frac{1}{3}$ ضرب می‌کنیم. $-\frac{2}{3} < 3x \leq 9$

$$-\frac{2}{3} < x \leq 3$$

جواب به دست آمده از این روش را با جوابی که در قسمت بالا به آن رسیده‌اید، مقایسه کنید. نامعادله دوگانه فوق را به صورت دستگاه نامعادله‌های زیر نیز نشان می‌دهیم:

$$\begin{cases} 3x - 1 > -2 \\ 3x - 1 \leq 8 \end{cases}$$

حداقل و حداکثر دمای یک شهر در یک روز، ۱۵ و ۲۵ درجه سانتی‌گراد و رابطه‌ای که درجه فارنهایت (F) را به سانتی‌گراد (C) تبدیل می‌کند، به صورت $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ است. حداقل و حداکثر دمای این شهر را برحسب فارنهایت تعیین کنید. (قرار دهید $15 \leq C \leq 25$ ؛ سپس از رابطه داده شده، C را برحسب F بنویسید و نامعادله دوگانه به دست آمده را حل کنید.)

$$15 \leq C \leq 25 \Rightarrow 15 \leq \frac{5}{9}(F - 32) \leq 25$$

$$\xrightarrow{\times \frac{9}{5}} 27 \leq F - 32 \leq 45$$

$$\xrightarrow{+32} 59 \leq F \leq 77$$

سهمی $y = x^2 - 2x - 3$ را در نظر بگیرید که نمودار آن در شکل مقابل رسم شده است.

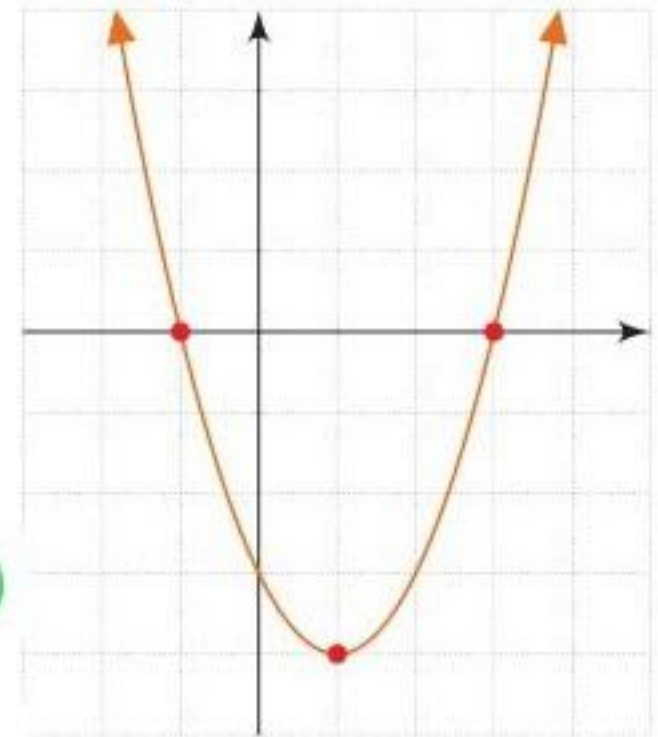
فعالیت

الف) به کمک نمودار رسم شده، برای چه مقادیری از x، نمودار سهمی، پایین محور x هاست؟ $-1 < x < 3$

ب) جدول تعیین علامت عبارت $y = x^2 - 2x - 3$ را رسم کنید و مشخص کنید برای چه مقادیری از x، علامت y منفی است؟ $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1$

به ازای $-1 < x < 3$ ، y منفی است.

x	-1	3
y	+	-



ب) نشان دهید که از مجموعه جواب‌های به دست آمده در هر یک از قسمت‌های الف و ب می‌توان برای حل نامعادله $x^2 - 2x - 3 < 0$ استفاده کرد.

$x^2 - 2x - 3 < 0$ یعنی مجموعه مقادیری از x که به ازای آنها $y < 0$ باشد که با توجه به نمودار

$-1 < x < 3$ مشخص شده است. همچنین به کمک جدول تعیین علامت نیز به همین جواب رسیدیم.

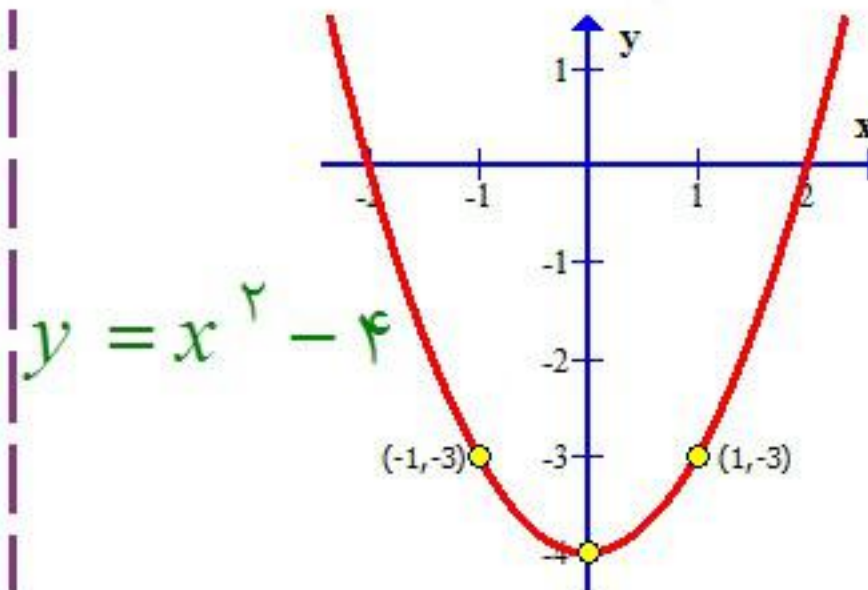
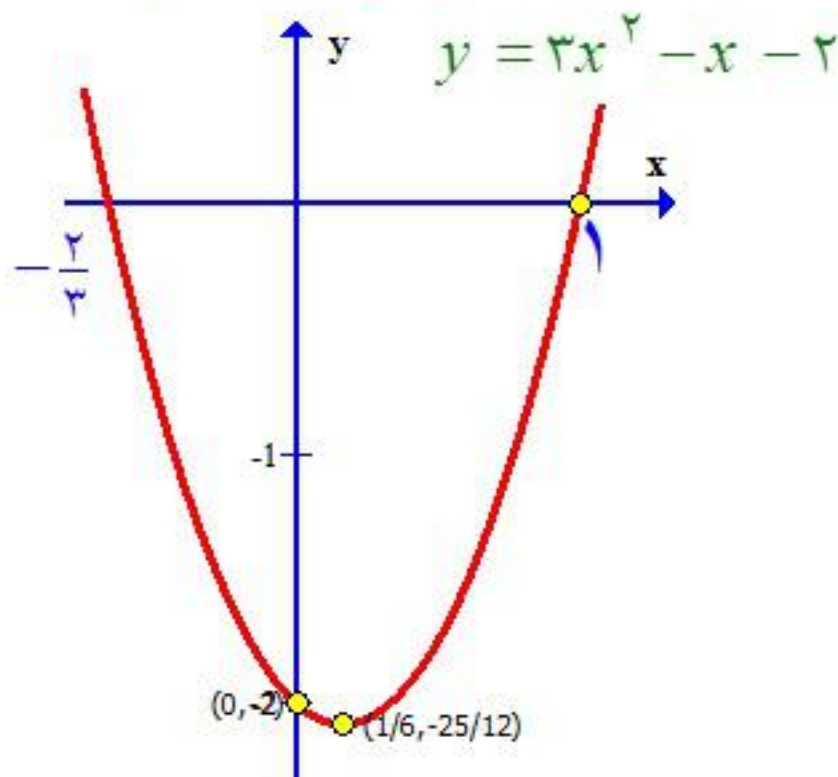
هر یک از نامعادلات زیر را به دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کنید.

ب) $3x^2 - x - 2 \geq 0$

$$3x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta=25} x = 1, x = -\frac{2}{3}$$

x	$-\frac{2}{3}$	1
y	+	-

$$\Rightarrow (-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [1, +\infty)$$



الف) $x^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

x	-2	2
y	+	-

$$\Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

مثال

برای چه مقادیری از m، عبارت $y = x^2 + mx + 1$ همواره مثبت است؟

حل: از درس قبل به یاد داریم، برای اینکه عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره مقدار مثبت داشته باشد، باید $\Delta < 0$ و $a > 0$ باشد. در این عبارت، $a = 1$ و $\Delta = m^2 - 4$ است؛ بنابراین $m^2 - 4 < 0$ است.

جدول تعیین علامت، برای $m^2 - 4$ به صورت زیر است:

m	-2	2
$m^2 - 4$	+	-

بنابراین برای اینکه $m^2 - 4$ منفی باشد، باید $-2 < m < 2$.

نامعادله $\frac{x^2-9}{2x+1} \geq 0$ را حل می‌کنیم.

برای حل این نامعادله، عبارت $\frac{x^2-9}{2x+1}$ را تعیین علامت می‌کنیم. برای این کار ریشه‌های صورت و مخرج این کسر را پیدا می‌کنیم. ریشه‌های معادله $x^2-9=0$ ، اعداد ± 3 هستند و ریشه معادله $2x+1=0$ ، عدد $-\frac{1}{2}$ است. بنابراین، جدول تعیین علامت این کسر به صورت زیر است.

x	-3	$-\frac{1}{2}$	3
x^2-9	+	-	+
$2x+1$	-	0	+
$\frac{x^2-9}{2x+1}$	-	+	-

تعریف نشده

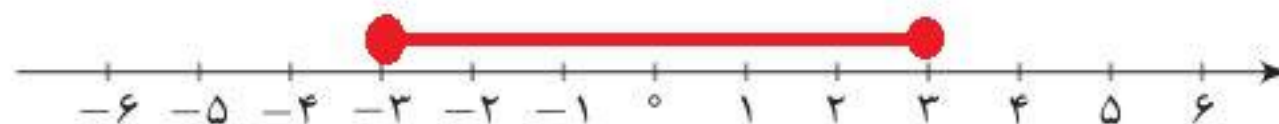
بنابراین اگر $-\frac{1}{2} \leq x < -3$ و یا $x \geq 3$ ، عبارت $\frac{x^2-9}{2x+1}$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر است؛ پس مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از: $[-3, -\frac{1}{2}) \cup [3, +\infty)$.

نامعادله‌های قدر مطلق

می‌دانیم که $|x|$ همان فاصله x از مبدأ، روی خط اعداد حقیقی است. مثلاً $|3| = 3$ و $|-3| = 3$ زیرا فاصله هر دو عدد 3 و -3 از مبدأ برابر 3 است.

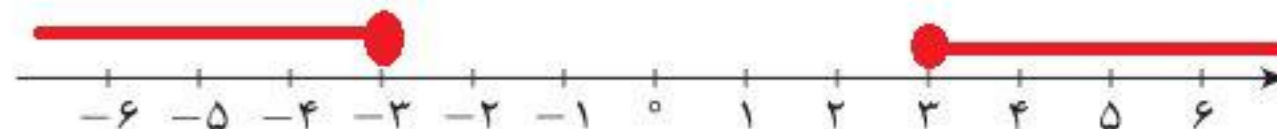
فعالیت

۱ نامعادله $|x| \leq 3$ را در نظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصله آنها از مبدأ کوچک‌تر یا مساوی 3 باشد. این اعداد را روی محور زیر نمایش دهید.



مجموعه مقادیری را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به صورت بازه بنویسید. $[-3, 3]$

۲ نامعادله $|x| \geq 3$ را در نظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصله آنها از مبدأ بزرگ‌تر یا مساوی 3 باشند. این اعداد را روی محور زیر نشان دهید.



مجموعه این مقادیر را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به صورت بازه بنویسید. $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

۳ با استفاده از مراحل بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$\begin{aligned} |x| \leq 3 &\Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \Rightarrow \text{مجموعه جواب (به شکل بازه)} = [-3, 3] \\ |x| \geq 3 &\Rightarrow x \geq 3 \text{ یا } x \leq -3 \Rightarrow \text{مجموعه جواب (به شکل بازه)} = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \end{aligned}$$

فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در این صورت^۱

۱- اگر $|u| \leq a$ سپس $-a \leq u \leq a$.

۲- اگر $|u| \geq a$ سپس $u \geq a$ یا $u \leq -a$.

مثال

نامعادله‌های زیر را حل می‌کنیم.

الف $|x-3| \leq 2$

ب $|2x-1| > 5$

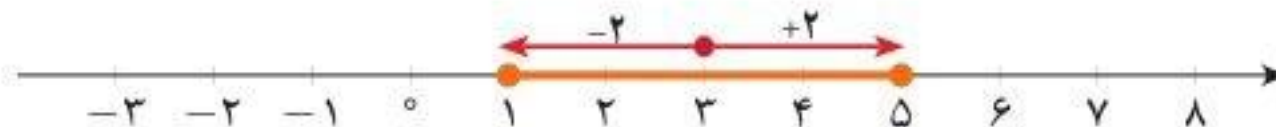
برای حل نامعادله الف، با استفاده از خواص قدر مطلق آن را به یک نامعادله دوگانه تبدیل می‌کنیم: $-2 \leq x-3 \leq 2$ اکنون داریم:

$$-2 \leq x-3 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5.$$

پس مجموعه جواب این نامعادله، بازه $[1, 5]$ است و نمایش هندسی آن به صورت زیر است.



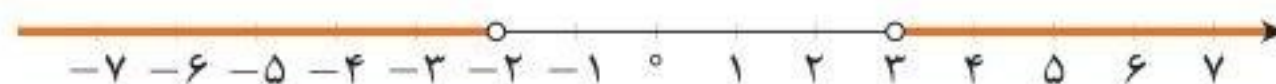
برای حل نامعادله $|x-3| \leq 2$ به روش هندسی باید نقاطی مانند x را روی محور پیدا کنیم که فاصله آنها از نقطه ۳، حداکثر دو باشد. بنابراین بازه $[1, 5]$ ، مطابق شکل زیر به دست می‌آید.



برای حل نامعادله ب نیز از خواص قدر مطلق استفاده می‌کنیم و داریم:

$$|2x-1| > 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 > 5 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3 \\ 2x-1 < -5 \Rightarrow 2x < -4 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از: $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ و نمایش هندسی آن جواب نیز به صورت زیر است.



۱- در هریک از این نامعادله‌ها، اگر علامت مساوی وجود نداشته باشد، هیچ کدام از جواب‌ها نیز علامت مساوی ندارند.

۱ در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را با نماد بازه به دست آورید؛ سپس آن را

روی محور نشان دهید. الف) $\frac{x}{3} + 11 < \frac{2}{3}$

ب) $|5 - 2x| \geq 1$

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} < \frac{x}{3} + 1 < \frac{2}{3} &\xrightarrow{-1} -\frac{5}{3} < \frac{x}{3} < -\frac{1}{3} \xrightarrow{\times 3} -5 < x < -1 \\ &\Rightarrow (-5, -1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 - 2x \geq 1 &\Rightarrow -2x \geq -4 \Rightarrow x \leq 2 \\ 5 - 2x \leq -1 &\Rightarrow -2x \leq -6 \Rightarrow x \geq 3 \\ &\Rightarrow (-\infty, 2] \cup [3, +\infty) \end{aligned}$$

۲ یک نامعادله قدر مطلق بنویسید که مجموعه جواب آن بازه $(1, 9)$ باشد.

با توجه به این که ۵ وسط بازه $(1, 9)$ است، این بازه مجموعه نقطه‌ای است که فاصله‌شان از ۵ کمتر از ۴ می‌باشد بنابراین $|x - 5| < 4$ جواب است.

توجه: در حالت کلی، بازه (a, b) را می‌توان به صورت $|x - \frac{b+a}{2}| < \frac{b-a}{2}$ نوشت.

۳ یک نامعادله قدر مطلق بنویسید که مجموعه جواب آن $(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$ باشد.

با توجه به این که $\frac{9}{2}$ وسط فاصله $[3, 6]$ است، شکل مجموعه نقطه‌ای است که فاصله‌شان از $\frac{9}{2}$ بیشتر از $\frac{3}{2}$ می‌باشد بنابراین $|x - \frac{9}{2}| \geq \frac{3}{2}$ جواب است.

توجه: در حالت کلی، مجموعه $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ را می‌توان به صورت $|x - \frac{b+a}{2}| \geq \frac{b-a}{2}$ نوشت.

تمرین

۱ در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

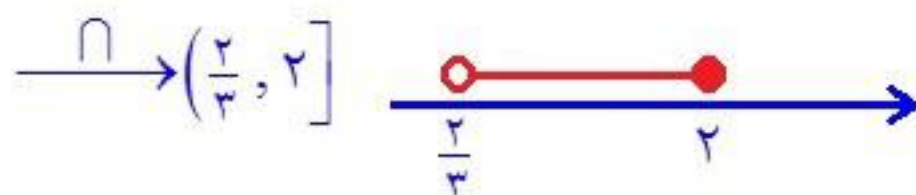
$$4 < 2x \leq 6 \xrightarrow{\div 2} 2 < x \leq 3 \Rightarrow (2, 3]$$



$$\text{الف) } 1 < 2x - 3 \leq 3$$

$$x + 1 \leq 5 - x \Rightarrow 2x \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$$

$$5 - x < 2x + 3 \Rightarrow -3x < -2 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$$



$$\text{ب) } x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3$$

$$\begin{aligned} -4 < 5 - x < 0 &\xrightarrow{-5} -9 < -x < -5 \xrightarrow{\times (-1)} 9 > x > 5 \Rightarrow (5, 9) \end{aligned}$$



$$\text{پ) } -2 < \frac{5-x}{2} < 0$$

$$x(x^2 + 4) < 0 \quad \text{ث) جواب ندارد} \quad x = 0, x^2 + 4 = 0$$

x	-	0	+
$x^2 + 4$	+	+	+
عبارت	-	0	+

مجموعه جواب $= (-\infty, 0)$



	$-\frac{1}{3}$	2	
$4 - 2x$	+	+	0
$3x + 1$	-	0	+
کسر	-	+	0



مجموعه جواب $= (-\frac{1}{3}, 2]$

$$\text{ت) } \frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$$

$$x = 2 \Leftarrow 4 - 2x = 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \Leftarrow 3x + 1 = 0$$

$$\text{ج) } |7 - 2x| < 1$$

$$-1 < 7 - 2x < 1 \xrightarrow{-7} -8 < -2x < -6$$

$$\xrightarrow{\div -2} 4 > x > 3 \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (3, 4)$$



$$x = 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

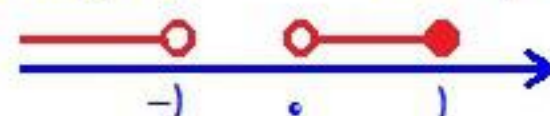
$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\Delta = -4 \rightarrow \text{جواب ندارد}$$

$$\text{مجموعه جواب} = (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

$$\frac{x(x^2 - 1)}{x^2 - 2x + 2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0 \quad \text{ج)}$$

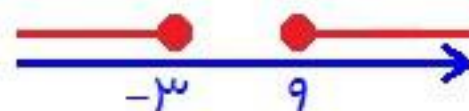
	-1	0	1	
x	-	-	0	+
$x^2 - 1$	+	0	-	-
$x^2 - 2x + 2$	+	+	+	+
کسر	-	0	+	0



$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2} - 1 \geq 3 &\xrightarrow{+1} \frac{x-1}{2} \geq 4 \xrightarrow{\times 2} x - 1 \geq 8 \xrightarrow{+1} x \geq 9 \\ \frac{x-1}{2} - 1 \leq -3 &\xrightarrow{+1} \frac{x-1}{2} \leq -2 \xrightarrow{\times 2} x - 1 \leq -4 \xrightarrow{+1} x \leq -3 \end{aligned}$$

$$\text{ح) } \left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3$$

$$\text{مجموعه جواب} = (-\infty, -3] \cup [9, +\infty)$$



۲ به ازای چه مقادیری از k ، عبارت $A = x^2 + 3x + k$ همواره مثبت است؟

با توجه به مثبت بودن a کفیسست دلتا منفی باشد؛ $\Delta < 0 \Rightarrow 9 - 4k < 0 \Rightarrow -4k < -9 \Rightarrow k > \frac{9}{4}$

۳ به ازای چه مقادیری از m ، سهمی $y = mx^2 - mx - 1$ همواره پایین محور x هاست؟

از فرض سوال نتیجه می شود که باید عبارت همواره منفی باشد پس باید دلتا منفی و a منفی باشند.

$\Delta < 0 \Rightarrow m^2 + 4m < 0$

$$\begin{array}{c} \frac{m^2 + 4m}{m^2 + 4m} \quad \begin{array}{c} -4 \quad 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} + \quad - \quad + \end{array} \Rightarrow -4 < m < 0 \\ \left. \begin{array}{c} m < 0 \text{ از طرفی } a \text{ منفی باشد} \end{array} \right\} \Rightarrow -4 < m < 0 \end{array}$$

۴ یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه t از رابطه

$h = -5t^2 + 18t + 13$ محاسبه شود، در چه فاصله زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

$h > 13 \Rightarrow -5t^2 + 18t + 13 > 13 \Rightarrow -5t^2 + 18t > 0$

$$\frac{-5t^2 + 18t}{-5t^2 + 18t} \quad \begin{array}{c} 0 \quad \frac{18}{5} \end{array} \quad \begin{array}{c} - \quad + \quad - \end{array} \Rightarrow (0, \frac{18}{5})$$

۵ تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطه $y = \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200$ به دست می آید. در چه زمان هایی پس از یک کار سنگین بدنی،

تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟ آیا تمام جواب های به دست آمده قابل قبول اند؟

$\Rightarrow \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200 > 110 \Rightarrow \frac{15}{8}x^2 - 30x + 90 > 0 \xrightarrow{\times 8} 15x^2 - 240x + 720 > 0$

$15x^2 - 240x + 720 = 0 \xrightarrow{\Delta = 14400} x = 12, x = 4$

$$\frac{15x^2 - 240x + 720}{15x^2 - 240x + 720} \quad \begin{array}{c} 4 \quad 12 \end{array} \quad \begin{array}{c} + \quad - \quad + \end{array}$$

$\Rightarrow x < 4 \text{ یا } x > 12$

از بین جواب های بدست آمده آنهایی که مثبت هستند قابل قبول اند. واضح هست که جواب های صفر و منفی قابل قبول نیستند