اعداد حقیقی و ویژگی‌های آن

اعداد حقیقی اعدادی هستند که بتوان آن‌ها را به صورت اعشاری بیان کرد. اعداد حقیقی به دو دسته‌ی بزرگ یعنی اعداد گویا و اعداد گنگ تقسیم می‌شوند.

خواص اعداد حقیقی: خواص اعداد حقیقی را می‌توان در سه رده دسته‌بندی کرد:

۱ خواص جبری ۲ خواص پیوستاری ۳ خواص ترتیب

خواص جبری اعداد حقیقی

اصل موضوع: وقتی برای درستی یک حکم نتوانیم یا نخواهیم دلیلی منطقی بیان کنیم، آن حکم را به عنوان اصل موضوع مطرح می‌کنیم. بنابراین اصل موضوع، حکم یا گزاره‌ای است که آن را بدون دلیل و برهان می‌پذیریم. اصل موضوع را به‌طور خلاصه‌تر اصل می‌گوییم. برای مثال، جمع، خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی $a+b=b+a$ که این حکم را به عنوان اصل درنظر می‌گیریم.

بسته بودن: مجموعه‌ی A را نسبت به عمل $*$ بسته گویند، هرگاه به ازای هر دو عضو دلخواه a و b از مجموعه‌ی A، $a*b\in A$ باشد (a و b را می‌توان مساوی درنظر گرفت).

نکته: مجموعه‌ی اعداد گویا نسبت به اعمال جمع، تفریق و ضرب بسته است.

نکته: مجموعه‌ی اعداد گنگ نسبت به هیچ یک از اعمال جمع، تفریق و ضرب و تقسیم بسته نیست.

اصل‌های جمعی: مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ همراه با عمل جمع دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد: $(x,y,z\in\mathbb{R})$

۱ مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ نسبت به عمل جمع بسته است: $x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow x+y\in\mathbb{R}$

۲ جمع روی $\mathbb{R}$ دارای خاصیت جابه‌جایی (تعویض‌پذیری) است: $x+y=y+x$

۳ جمع روی $\mathbb{R}$ دارای خاصیت شرکت‌پذیری است: $x+(y+z)=(x+y)+z$

۴ جمع روی $\mathbb{R}$ دارای خاصیت عضو خنثی (همانی) صفر است: $x+0=x$

۵ در $\mathbb{R}$ عضو قرینه برای هر x وجود دارد که با $-x$ نمایش می‌دهیم: $x+(-x)=0$

اصل‌های ضربی: مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ همراه با عمل ضرب دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد: $(x,y,z\in\mathbb{R})$

۱ مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ نسبت به عمل ضرب بسته است: $x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow x\times y\in\mathbb{R}$

۲ ضرب روی $\mathbb{R}$ دارای خاصیت جابه‌جایی (تعویض‌پذیری) است: $x\times y=y\times x$

۳ ضرب روی $\mathbb{R}$ دارای خاصیت شرکت‌پذیری است: $x\times(y\times z)=(x\times y)\times z$

۴ ضرب روی $\mathbb{R}$ دارای خاصیت عضو خنثی (همانی) یک است: $x\times 1=x$

۵ در $\mathbb{R}-\{0\}$، عضو وارون برای هر x وجود دارد که با $\frac{1}{x}$ (یا x^{-1}) نمایش می‌دهیم: $x\times\frac{1}{x}=1$

۶ ضرب نسبت به جمع توزیع‌پذیر است: $x\times(y+z)=xy+xz$

تست: کدام مجموعه‌ی زیر نسبت به ضرب بسته است، اما نسبت به جمع بسته نیست؟

۱) $A=\left\{a^2+1,\frac{1}{a^2+1}\right\}$ ۲) $B=\left\{\frac{1}{5},1,5\right\}$ ۳) $C=\{-1,0,1\}$ ۴) $D=\{-1,0\}$

پاسخ: گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) این مجموعه نسبت به جمع و ضرب بسته نیست، برای مثال: $(a^2+1)\times(a^2+1)\notin A$

۲) این مجموعه نسبت به جمع و ضرب بسته نیست، برای مثال: $5\times 5=25\notin B\ ,\ 5+5=10\notin B$

۳) در این مجموعه، هر دو عدد دلخواه را در هم ضرب کنیم، حاصل در مجموعه می‌باشد، پس نسبت به ضرب بسته است، اما نسبت به جمع بسته نیست. برای مثال: $1+1=2\notin C$

۴) این مجموعه نسبت به جمع و ضرب بسته نیست، برای مثال: $(-1)\times(-1)=1\notin D\ ,\ (-1)+(-1)=-2\notin D$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

نکته: مجموعه‌ی تک عضوی $\{0\}$، تنها مجموعه‌ای است که متناهی و غیرتهی می‌باشد و نسبت به عمل جمع بسته است.

نکته: مجموعه‌های $\{0\}$، $\{1\}$، $\{-1,1\}$، $\{0,1\}$، $\{-1,0,1\}$، تنها مجموعه‌هایی هستند که متناهی و غیرتهی‌اند و نسبت به عمل ضرب بسته‌اند.

تست: مجموعه‌ی $A=\left\{\frac{۱}{۲k-۱}: k\in\mathbb{Z}\right\}$ کدام ویژگی را ندارد؟

۱) عضو همانی در عمل ضرب دارد.
۲) عضو قرینه برای هر عضو آن دارد.
۳) نسبت به عمل جمع بسته است.
۴) نسبت به عمل ضرب بسته است.

پاسخ: اعضای مجموعه به‌صورت $A=\left\{\pm ۱,\pm\frac{۱}{۳},\pm\frac{۱}{۵},\cdots\right\}$ می‌باشند. عضو همانی در عمل ضرب برابر یک است که در مجموعه موجود است. قرینه‌ی هر عضو نیز در مجموعه وجود دارد. اما نسبت به عمل جمع بسته نیست. برای مثال $(-۱)+۱=۰$ که صفر متعلق به مجموعه نیست. اگر هر دو عضو دلخواه را در هم ضرب کنیم، حاصل در مجموعه هست. برای اثبات این موضوع، دو عضو دلخواه $\frac{۱}{۲k-۱}$ و $\frac{۱}{۲k'-۱}$ را درنظر می‌گیریم:

$$\frac{۱}{۲k-۱}\times\frac{۱}{۲k'-۱}=\frac{۱}{\underbrace{۴kk'-۲k-۲k'+۱}_{۲(۲kk'-k-k'+۱)-۱}}=\frac{۱}{۲k''-۱}$$

یعنی این مجموعه نسبت به عمل ضرب بسته است. پس گزینه‌ی (۳) صحیح می‌باشد.

چند نکته‌ی کاربردی

نکته: اگر برای هر عدد مثبت ε داشته باشیم $۰\le a<\varepsilon$، آن‌گاه $a=۰$.

نکته: اگر برای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $۰\le a<\frac{۱}{n}$، آن‌گاه $a=۰$.

نکته: اگر برای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $a\le b<a+\frac{c}{n}$، آن‌گاه $a=b$.

تست: اگر به ازای هر $h>۰$، $۵a^۲+b^۲-۴ab-a+\frac{۱}{۴}<h$ باشد، آن‌گاه مقدار b کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: طبق نکته می‌توان نوشت:

$$۵a^۲+b^۲-۴ab-a+\frac{۱}{۴}=۰\Rightarrow(۴a^۲+b^۲-۴ab)+\left(a^۲+\frac{۱}{۴}-a\right)=۰\Rightarrow(۲a-b)^۲+\left(a-\frac{۱}{۲}\right)^۲=۰$$

چون مجموع دو مقدار نامنفی صفر شده، باید هرکدام جداگانه صفر باشند. پس داریم:

$$a-\frac{۱}{۲}=۰\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\quad,\quad ۲a-b=۰\Rightarrow b=۲a=۱$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

تست: اگر به ازای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $k^۲+۳\le k^۴+b-۱<۳+\frac{۵}{n}$، آن‌گاه $b+k$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) ۲

پاسخ: اگر از هر قسمت عدد ۳ را کم کنیم نتیجه می‌گیریم: $k^۲\le k^۴+b-۴<\frac{۵}{n}$، بنابراین باید به‌ازای هر عدد طبیعی n، رابطه‌ی $۰\le k^۲<\frac{۵}{n}$ برقرار باشد، پس حتماً $k=۰$ است. در نتیجه داریم:

$$۰\le b-۴<\frac{۵}{n}\Rightarrow b-۴=۰\Rightarrow b=۴\Rightarrow b+k=۴$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

خواص پیوستاری اعداد حقیقی

همان‌طور که اشاره شد، اعداد حقیقی به دو دسته‌ی بزرگ یعنی اعداد گویا و اعداد گنگ تقسیم می‌شوند. در این قسمت اعداد گویا و گنگ را تعریف کرده و ویژگی‌های آن‌ها را بیان می‌کنیم.

عدد گویا: هر عددی که بسط اعشاری آن، پایان‌پذیر یا پایان‌ناپذیر متناوب باشد، گویا می‌نامند. مانند اعداد زیر:

$$-۳\ ,\ \frac{۳}{۴}=۰/۷۵\ ,\ \frac{۲}{۳}=۰/۶۶۶\cdots=۰/\overline{۶}$$

عدد گنگ: هر عددی که بسط اعشاری آن، پایان‌ناپذیر غیرمتناوب باشد، گنگ یا اصم می‌نامند. مانند اعداد زیر:

$$\sqrt{۳}=۱/۷۳۲۰۵۰\cdots\ ,\ \pi=۳/۱۴۱۵۹۲\cdots\ ,\ \log ۲=۰/۳۰۱۰۲۹\cdots$$

هر دو دسته‌ی اعداد گویا و گنگ بسیار فشرده و در کنار هم، با هم به نوعی تنیده شده‌اند که این ویژگی جزء خواص پیوستاری اعداد حقیقی است.

نکته: بین هر دو عدد حقیقی بی‌شمار عدد گویا و بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.

نکته: اگر a و b گویا باشند، اعداد $a+b$، $a-b$، $a\times b$ و $\frac{a}{b}\ (b\neq ۰)$ گویا هستند.

نکته: اگر a گویا و b گنگ باشد، اعداد $a+b$، $a-b$ و همچنین با شرط $a\neq ۰$، ab، $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ گنگ هستند.

نکته: اگر a و b گنگ باشند، اعداد $a+b$، $a-b$، $a\times b$ و $\frac{a}{b}$ می‌توانند گویا یا گنگ باشند.

تست: اگر α عدد اعشاری بی‌پایان و غیرمتناوب و β عددی گویا باشد، کدام‌یک از اعداد زیر قطعاً عدد اعشاری بی‌پایان و غیرمتناوب خواهد بود؟ آزمایشی سنجش

۱) $\alpha\beta-\alpha$ ۲) $\frac{1}{\alpha}+\beta$ ۳) $\alpha\beta+\beta$ ۴) $\alpha^2+\beta^2$

پاسخ: منظور از عدد اعشاری بی‌پایان غیرمتناوب عدد گنگ می‌باشد، پس α و در نتیجه $\frac{1}{\alpha}$ گنگ هستند. از طرفی مجموع یک عدد گویا و گنگ، گنگ است پس همواره $\frac{1}{\alpha}+\beta$ عددی گنگ می‌باشد.

مثال نقض بقیه‌ی گزینه‌ها به صورت زیر است:

۱) $\alpha=\sqrt{2}\ ,\ \beta=1\Rightarrow \alpha\beta-\alpha=\alpha(\beta-1)=0$

۳) $\alpha=\sqrt{2}\ ,\ \beta=0\Rightarrow \alpha\beta+\beta=\beta(\alpha+1)=0$

۴) $\alpha=\sqrt{2}\ ,\ \beta=1\Rightarrow \alpha^2+\beta^2=3$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

تست: اگر a عددی گنگ باشد، کدام گزینه قطعاً عددی گنگ است؟

۱) $\log_\pi a$ ۲) a^3+9a^2+27a ۳) a^2+a-2 ۴) $\frac{a^2-a-2}{a^2-1}$

پاسخ: برای گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) مثال نقض می‌آوریم و گزینه‌ی (۴) را بررسی می‌کنیم که همواره گنگ است.

۱) به ازای $a=\sqrt{\pi}$ داریم: $\log_\pi\sqrt{\pi}=\frac{1}{2}$ که عددی گویا است.

۲) با توجه به تساوی $a^3+9a^2+27a=(a+3)^3-27$ به ازای $a=\sqrt[3]{3}-3$ داریم: $(\sqrt[3]{3}-3+3)^3-27=-24$ که عددی گویا است.

۳) با توجه به تساوی $a^2+a-2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$ به ازای $a=\sqrt{5}-\frac{1}{2}$ داریم: $\left(\sqrt{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=\frac{11}{4}$ که عددی گویا است.

۴) $\frac{(a-2)(a+1)}{(a-1)(a+1)}=\frac{a-2}{a-1}=\frac{a-1-1}{a-1}=1-\frac{1}{a-1}$

اگر a گنگ باشد، قطعاً $\frac{1}{a-1}$ گنگ است (معکوس یک عدد گنگ قطعاً گنگ است)، پس $1-\frac{1}{a-1}$ هم گنگ می‌شود. بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

خط حقیقی: از نظر هندسی اعداد حقیقی را می‌توانیم به‌صورت نقاط یک خط مستقیم نشان دهیم، که آن را خط حقیقی یا محور حقیقی می‌نامیم. هر عدد حقیقی متناظر بر این خط است و برعکس، یعنی هر نقطه‌ی این خط، نظیر یک عدد حقیقی منحصر به فرد می‌باشد.

اعداد حقیقی همراه با دو عمل جمع و ضرب خواص جبری دارند که روی هم دستگاهی جبری تشکیل می‌دهند که آن را دستگاه اعداد حقیقی می‌نامیم.

بسط اعشاری اعداد گویا

کسر تحویل‌ناپذیر: اگر $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ و صورت و مخرج آن نسبت به هم اول باشند، یعنی $(a,b)=1$، آن‌گاه کسر ساده نشدنی $\frac{a}{b}$ را کسر تحویل‌ناپذیر گویند.

اعداد گویا بستگی به نوع بسط اعشاری‌شان به سه دسته تقسیم می‌شوند:

۱ کسرهایی که بسط اعشاری آن‌ها یک عدد اعشاری **پایان‌پذیر** است. مانند اعداد مقابل: $\frac{1}{8}=0/125$, $\frac{3}{2}=1/5$, $\frac{2}{5}=0/4$

تذکر: در یک کسر تحویل‌ناپذیر اگر عدد مخرج فقط از عوامل اول ۲ یا ۵ (یا هر دو) تشکیل شده باشد، بسط اعشاری آن پایان‌پذیر است، مانند $\frac{1}{8}$ که مخرج آن به‌صورت 2^3 می‌باشد.

۲ کسرهایی که بسط اعشاری آن‌ها یک عدد اعشاری **پایان‌ناپذیر متناوب ساده** است. مانند اعداد زیر:

$\frac{1}{33}=0/030303\ldots=0/\overline{03}$, $\frac{5}{3}=1/666\ldots=1/\overline{6}$

تذکر: در یک کسر تحویل‌ناپذیر اگر عدد مخرج از عوامل اول به جز ۲ و ۵ تشکیل شده باشد، بسط اعشاری آن متناوب ساده است، مانند $\frac{1}{33}$ که مخرج آن به صورت 3×11 است.

۳ کسرهایی که بسط اعشاری آن‌ها یک عدد اعشاری **پایان‌ناپذیر متناوب مرکب** است. مانند اعداد زیر:

$\frac{7}{30}=0/2333\ldots=0/2\overline{3}$, $\frac{1}{6}=0/166\ldots=0/1\overline{6}$

تذکر: در یک کسر تحویل‌ناپذیر اگر عدد مخرج از عوامل ۲ یا ۵ (یا هر دو) و همچنین حداقل یک عامل اول غیر از ۲ و ۵ تشکیل شده باشد، بسط اعشاری آن متناوب مرکب است، مانند $\frac{7}{30}$ که مخرج آن به صورت $5\times2\times3$ است.

در بسط اعشاری متناوب ساده و مرکب، دسته ارقامی که مرتب تکرار می‌شوند را **دوره‌ی گردش** عدد می‌نامند و در نوشتن عدد، بالای ارقامی که دوره‌ی گردش‌اند خط کشیده می‌شود. ارقامی که بین دوره‌ی گردش و ممیز قرار دارند، ارقام غیر گردش نامیده می‌شوند.

کسر مولد بسط اعشاری

فرض کنید یک بسط اعشاری متناوب ساده یا مرکب داشته باشیم و می‌خواهیم کسر گویای مساوی آن را به‌دست آوریم. به کمک مثال زیر روش به‌دست آوردن آن را توضیح می‌دهیم.

مثال: کسرهای مولد $۰/\overline{۲۳}$ و $۱/۲۵\overline{۴}$ را به‌دست آورید.

پاسخ: عدد $۰/\overline{۲۳}$ را مساوی a درنظر می‌گیریم و در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} a = ۰/۲۳۲۳\ldots = ۰/\overline{۲۳} \\ ۱۰۰a = ۲۳/۲۳۲۳\ldots = ۲۳/\overline{۲۳} \end{cases}$$

اگر دو طرف تساوی را از هم کم کنیم، داریم:

$$۱۰۰a - a = ۲۳/\overline{۲۳} - ۰/\overline{۲۳} \Rightarrow ۹۹a = ۲۳ \Rightarrow a = \frac{۲۳}{۹۹}$$

یعنی در اعداد گویای متناوب ساده کافی است عدد را a فرض کرده و سپس a را در عددی به‌صورت ۱۰^n ضرب کنیم به‌طوری که یک دوره‌ی گردش آن قبل از ممیز قرار گیرد، سپس آن‌ها را از هم کم می‌کنیم.

حال عدد $۱/۲۵\overline{۴}$ را مساوی a درنظر می‌گیریم، سپس آن را یک بار در ۱۰۰ و یک بار در ۱۰۰۰ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۱۰۰a = ۱۲۵/۴۴۰\ldots = ۱۲۵/\overline{۴} \\ ۱۰۰۰a = ۱۲۵۴/۴۴۰\ldots = ۱۲۵۴/\overline{۴} \end{cases}$$

حال اگر دو طرف تساوی‌ها را از هم کم کنیم، داریم:

$$۱۰۰۰a - ۱۰۰a = ۱۲۵۴/\overline{۴} - ۱۲۵/\overline{۴} \Rightarrow ۹۰۰a = ۱۱۲۹ \Rightarrow a = \frac{۱۱۲۹}{۹۰۰}$$

یعنی برای تعیین کسر مولد اعداد گویای متناوب مرکب باید در دو مرحله آن را در ۱۰^n طوری ضرب کنیم که یک بار قسمت غیرگردش و یک بار یک دوره‌ی گردش، قبل از ممیز قرار گیرند، سپس آن‌ها را از هم کم می‌کنیم.

با توجه به مطلب بالا می‌توان نکته‌ی زیر را برای تعیین کسر مولد نتیجه گرفت:

نکته: کسر مولد عدد اعشاری $A/a_۱a_۲\cdots a_m\overline{b_۱b_۲\cdots b_n}$ برابر است با:

$$\frac{Aa_۱a_۲\cdots a_m b_۱b_۲\cdots b_n - Aa_۱a_۲\cdots a_m}{\underbrace{۹۹\ldots۹}_{n\text{ تا}}\ \underbrace{۰۰\ldots۰}_{m\text{ تا}}}$$

برای مثال، کسرهای مولد مثال قبلی را به کمک نکته به‌دست می‌آوریم:

$$۰/\overline{۲۳} = \frac{۲۳}{۹۹} \quad , \quad ۱/۲۵\overline{۴} = \frac{۱۲۵۴ - ۱۲۵}{۹۰۰} = \frac{۱۱۲۹}{۹۰۰}$$

تست: با فرض $m = ۱/۰\overline{۲}$ و $n = ۰/۴\overline{۶}$، حاصل $m+n$ را به صورت کسر $\frac{a}{b}$ نوشته‌ایم. اگر a و b دو عدد طبیعی نسبت به هم اول باشند، $a+b$ کدام است؟

۱) ۲۲۳ ۲) ۲۲۴ ۳) ۱۱۱ ۴) ۱۱۲

پاسخ: دو عدد را زیر هم نوشته و با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} ۱/۰۲۲۲\ldots \\ ۰/۴۶۶۶\ldots \\ \hline ۱/۴۸۸۸\ldots \end{array} \Rightarrow m+n = ۱/۴\overline{۸} = \frac{۱۴۸-۱۴}{۹۰} = \frac{۱۳۴}{۹۰} = \frac{۶۷}{۴۵}$$

پس کسر $\frac{a}{b}$ به‌صورت $\frac{۶۷}{۴۵}$ می‌باشد، در نتیجه $a+b = ۱۱۲$. بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

تست: اگر کسر $۰/۱\overline{ab}$ برابر $\frac{۷}{۶۶}$ باشد، آن‌گاه مولد عدد اعشاری $a/\overline{ab}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳۳}$ ۳) $\frac{۲۲۱}{۹۹}$ ۴) $\frac{۱۱۵}{۹۹}$

پاسخ: به کمک نکته، کسر مولد $۰/۱\overline{ab}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۰/۱\overline{ab} = \frac{\overline{۱ab}-۱}{۹۹۰} = \frac{۷}{۶۶} \Rightarrow \overline{۱ab} - ۱ = ۱۵(۷) = ۱۰۵ \Rightarrow \overline{۱ab} = ۱۰۶ \Rightarrow a = ۰, b = ۶$$

توجه داشته باشید که $\overline{۱ab}$ منظور یک عدد سه رقمی است که یکان آن b، دهگان آن a و صدگان آن ۱ است. بنابراین داریم:

$$a/\overline{ab} = ۰/۰\overline{۶} = \frac{۶}{۹۹} = \frac{۲}{۳۳}$$

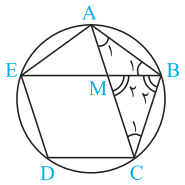
پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

تقریب اعداد گنگ

می‌دانیم ارقام بسط اعشاری هر عدد گنگ طبق هیچ ضابطه و نظم خاصی نیستند. $\sqrt{۲}$ و π (عدد ارشمیدس) مشهورترین اعداد گنگ هستند. اولین‌بار ارشمیدس، π را به عنوان ثابت دایره کشف کرد. **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** ریاضی‌دان ایرانی به کمک درج چندضلعی‌های منتظم و محاسبه‌ی تقریبی بسط آن توانست به‌صورت دقیق‌تری π را محاسبه کند. دقت محاسبات او به گونه‌ای بود که تا ۲۰۰ سال بعد، هیچ کس نتوانست از او پیشی بگیرد. اکنون با استفاده از سوپر رایانه‌ها مقدار π تا بیش از ۳۰۰۰ میلیارد رقم محاسبه شده است.

قضیه‌ی هیپاسوس: در هر پنج‌ضلعی منتظم با طول ضلع a، نسبت طول قطر به طول ضلع، عددی گنگ است.

اثبات: پنج‌ضلعی و دایره‌ی محیطی آن را رسم می‌کنیم. این دایره به ۵ قسمت مساوی تقسیم می‌شود، پس اندازه‌ی هر کمان آن $\frac{۳۶۰^\circ}{۵}=۷۲^\circ$ است. می‌دانیم اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی نصف کمان روبه‌رویش است. بنابراین:



$$\hat{A}_۱=\hat{B}_۱=\hat{C}_۱=۳۶^\circ$$

$$\hat{B}_۲=۲(۳۶^\circ)=۷۲^\circ\Rightarrow\hat{M}_۲=۱۸۰^\circ-(\hat{B}_۲+\hat{C}_۱)=۷۲^\circ$$

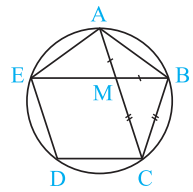
پس مثلث BMC متساوی‌الساقین است و $BC=MC=a$.

دو مثلث AMB و ABC به دلیل برابری دو زاویه با یک‌دیگر متشابه‌اند، در نتیجه اگر طول قطر را d درنظر بگیریم، آن‌گاه:

$$\overset{\Delta}{AMB}\sim\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow\frac{AM}{BC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{d-a}{a}=\frac{a}{d}\Rightarrow d^۲-ad-a^۲=۰\Rightarrow d=\frac{a\pm\sqrt{a^۲+۴a^۲}}{۲}=\frac{a\pm\sqrt{۵}a}{۲}\Rightarrow d=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}a\Rightarrow\frac{d}{a}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

اگر می‌خواهید در حل تست‌های مربوط به قضیه‌ی هیپاسوس، سرعت بیشتری داشته باشید باید موارد زیر را به خاطر بسپارید:

۱ در هر پنج‌ضلعی منتظم نسبت طول قطر به طول ضلع، عدد گنگ $\frac{d}{a}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ است. پس اگر طول قطر، یک عدد گویا باشد، حتماً طول ضلع گنگ است و همین‌طور اگر طول ضلع، یک عدد گویا باشد، حتماً طول قطر گنگ است. (البته توجه داشته باشید که اگر طول قطر گنگ باشد، نمی‌توان گفت طول ضلع، گویا یا گنگ است و همین‌طور اگر طول ضلع گنگ باشد، گنگ یا گویا بودن قطر معلوم نیست.)



۲ همواره داریم $AM=BM$ و $BC=MC$

۳ چهارضلعی $EMCD$ لوزی است.

خواص ترتیب اعداد حقیقی

نامساوی‌ها ویژگی‌های زیادی دارند که مهم‌ترین آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ هرگاه $a<b$ و $b<c$، آن‌گاه $a<c$.

۲ دو سمت نامساوی را می‌توان با یک عدد ثابت جمع کرد: $a>b\Rightarrow a+c>b+c$.

۳ دو سمت نامساوی را می‌توان در یک عدد مثبت ضرب کرد (اگر عدد منفی باشد، جهت تغییر می‌کند.):

$$\left.\begin{matrix}a>b\\m>۰\end{matrix}\right\}\Rightarrow ma>mb\ ,\quad \left.\begin{matrix}a>b\\m<۰\end{matrix}\right\}\Rightarrow ma<mb$$

۴ چند نامساوی هم‌جهت را می‌توان با حفظ جهت با یک‌دیگر جمع کرد:

$$\left.\begin{matrix}a>b\\c>d\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+c>b+d$$

۵ چند نامساوی هم‌جهت را می‌توان با حفظ جهت در یک‌دیگر ضرب کرد (به شرط آن که همگی مثبت باشند.):

$$(a,b,c,d>۰)\quad \left.\begin{matrix}a>b\\c>d\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac>bd$$

۶ دو سمت نامساوی را می‌توان به توان عدد طبیعی فرد رساند:

$$(n\in\mathbb{N})\ a>b\Rightarrow a^{۲n+۱}>b^{۲n+۱}$$

۷ اگر دو سمت یک نامساوی مثبت باشد، می‌توان دو سمت را به توان عدد طبیعی زوج رساند. اما اگر دو سمت منفی باشند، جهت تغییر می‌کند:

$$(a,b>۰,n\in\mathbb{N})\ a>b\Rightarrow a^{۲n}>b^{۲n}$$

$$(a,b<۰,n\in\mathbb{N})\ a>b\Rightarrow a^{۲n}<b^{۲n}$$

۸ برای معکوس کردن دو سمت نامساوی، اگر دو سمت هم‌علامت باشد، جهت تغییر می‌کند و اگر غیر هم‌علامت باشد، جهت تغییر نمی‌کند:

$$a>b\xrightarrow{a,b\ \text{هم‌علامت}}\frac{۱}{a}<\frac{۱}{b}\ ,\quad a>b\xrightarrow{a,b\ \text{غیر هم‌علامت}}\frac{۱}{a}>\frac{۱}{b}$$

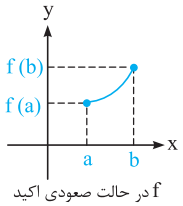
۹ برای مقایسه‌ی مقادیر مختلف a^n دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$a>۱\Rightarrow ۱<\cdots<\sqrt[۳]{a}<\sqrt{a}<a<a^۲<a^۳<\cdots$$

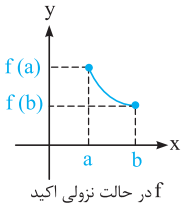
$$۰<a<۱\Rightarrow ۰<\cdots<a^۳<a^۲<a<\sqrt{a}<\sqrt[۳]{a}<\cdots<۱$$

۱۰ اگر $b>a$ باشد و بخواهیم $f(a)$ و $f(b)$ را با هم مقایسه کنیم، داریم:

$$b>a\begin{cases}f\ \text{صعودی اکید}\Rightarrow f(b)>f(a)\\f\ \text{نزولی اکید}\Rightarrow f(b)<f(a)\end{cases}$$



f در حالت صعودی اکید



f در حالت نزولی اکید

به عبارت بهتر اگر تابع صعودی اکید باشد، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند، اما اگر تابع نزولی اکید باشد، جهت تغییر می‌کند.

۱۱ اگر a و b هر دو نامنفی باشند، آن‌گاه واسطه‌ی حسابی از واسطه‌ی هندسی بزرگ‌تر یا مساوی است: $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow a+b \geq ۲\sqrt{ab}$

زمانی $a+b=۲\sqrt{ab}$ می‌شود که $a=b$ باشد.

(اگر a و b هر دو منفی باشند، آن‌گاه: $\frac{a+b}{۲} \leq -\sqrt{ab}$)

۱۲ اگر a مثبت باشد، آن‌گاه $a+\frac{۱}{a} \geq ۲$ و اگر a منفی باشد، آن‌گاه $a+\frac{۱}{a} \leq -۲$ است. (زمانی $a+\frac{۱}{a}=۲$ می‌شود که $a=۱$ و زمانی $a+\frac{۱}{a}=-۲$ می‌شود که $a=-۱$ باشد.)

۱۳ به ازای هر عدد طبیعی n و هر عدد حقیقی $x \geq -۱$ داریم: $(۱+x)^n \geq ۱+nx$ که به این نامساوی، **نامساوی برنولی** گویند.

۱۴ به ازای هر $n \geq ۳$ طبیعی داریم: $\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n+۱]{n+۱}$

تست: اگر $a > b$ باشد، کدام نامساوی زیر همواره برقرار است؟

۱) $\sqrt[۳]{b^۲} > \sqrt[۳]{a^۲}$ ۲) $b|a| > a|a|$ ۳) $۲^b > ۲^a$ ۴) $(a,b \neq ۰) b^{-۵} < a^{-۵}$

پاسخ: هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) با درنظر گرفتن $a=-۱$ و $b=۱$، نامساوی $\sqrt[۳]{b^۲} > \sqrt[۳]{a^۲}$ نادرست می‌شود.

۲) با درنظر گرفتن $a=۰$، نامساوی $b|a| > a|a|$ نادرست می‌شود.

۳) چون تابع $f(x)=۲^x$ اکیداً صعودی است، پس از $b > a$، نامساوی $۲^b > ۲^a$ را می‌توان نتیجه گرفت.

۴) اگر a و b غیر هم‌علامت باشند، نامساوی $\frac{۱}{a^۵} < \frac{۱}{b^۵}$ نادرست می‌شود.

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

تست: کم‌ترین مقدار عبارت $\tan^۴ x + ۳\cot^۴ x$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۲}$ ۲) $\sqrt{۱۵}$ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: راه حل اول: می‌توان عبارت را به‌صورت مربع کامل در آورد: $\tan^۴ x + ۳\cot^۴ x = (\tan^۲ x - \sqrt{۳}\cot^۲ x)^۲ + ۲\sqrt{۳}$

حداقل مقدار $(\tan^۲ x - \sqrt{۳}\cot^۲ x)^۲$ برابر صفر است، پس کم‌ترین مقدار عبارت برابر است با $۲\sqrt{۳}$.

راه حل دوم: چون $\cot^۴ x > ۰$ و $\tan^۴ x$ پس می‌توان از نامساوی $a+b \geq ۲\sqrt{ab}$ استفاده کرد:

$$\underbrace{\tan^۴ x}_{a} + \underbrace{۳\cot^۴ x}_{b} \geq ۲\sqrt{(\tan^۴ x)(۳\cot^۴ x)} \Rightarrow \tan^۴ x + ۳\cot^۴ x \geq ۲\sqrt{۳} = \sqrt{۱۲}$$

پس گزینه‌ی (۱) صحیح است.

تعیین علامت

برای این‌که معلوم کنیم علامت یک عبارت جبری، مثبت، منفی، صفر یا تعریف‌نشده است، از جدول تعیین علامت کمک می‌گیریم.

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه‌ی اول: چندجمله‌ای درجه‌ی اول $P(x)=ax+b \ (a \neq ۰)$ به‌ازای $x=\frac{-b}{a}$، صفر می‌شود و جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$P(x)$	a	مخالف علامت	۰	موافق علامت	a

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه‌ی دوم: جدول تعیین علامت چندجمله‌ای درجه‌ی دوم $P(x)=ax^۲+bx+c \ (a \neq ۰)$، بستگی به علامت Δ، به یکی از سه حالت زیر می‌باشد:

۱ اگر $\Delta > ۰$ باشد، چندجمله‌ای دو ریشه‌ی ساده‌ی $x_۱, x_۲ = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$ دارد. با فرض $x_۲ > x_۱$، جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$-\infty$		$x_۱$		$x_۲$		$+\infty$
$P(x)$	a	موافق علامت	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a	

۲ اگر $\Delta = ۰$ باشد، چندجمله‌ای یک ریشه‌ی مضاعف $x_۰ = \frac{-b}{۲a}$ دارد که جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$-\infty$		$\frac{-b}{۲a}$		$+\infty$
$P(x)$	a	موافق علامت	۰	موافق علامت a	

۳ اگر $\Delta < 0$ باشد، چندجمله‌ای ریشه ندارد و جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	موافق علامت a	

تعیین علامت عبارات به شکل کلی $y=\frac{f(x)}{g(x)}$

اگر $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌ای باشند، برای تعیین علامت عبارت $\frac{f(x)}{g(x)}$، به صورت زیر اقدام می‌کنیم:

۱ ریشه‌های f و g را پیدا کرده و از کوچک به بزرگ در یک جدول قرار می‌دهیم.

۲ از سمت راست، علامت اولین قسمت جدول را تعیین می‌کنیم. این علامت را می‌توان با امتحان یک عدد بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه، یا میل دادن x به سمت مثبت بی‌نهایت تعیین کرد.

۳ در جدول از سمت راست، علامت‌ها را یک در میان عوض می‌کنیم، فقط توجه داشته باشید که علامت در ریشه‌های مکرر مرتبه‌ی زوج به شکل $(x-a)^{2n}=0 \ (n\in\mathbb{N})$ تغییر نمی‌کند.

مثال: عبارت $P(x)=\frac{(x+2)(x-1)^2(3-x)^{15}}{(x-2)^5(x+3)}$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ: ابتدا ریشه‌ها را در جدول وارد می‌کنیم. برای تعیین علامت در بازه‌ی $(3,+\infty)$ می‌توان $P(4)$ را حساب کرد یا x را به سمت $+\infty$ میل داد تا علامت P مشخص شود:

x	$-\infty$	-3		-2		1		2		3		$+\infty$
$P(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$

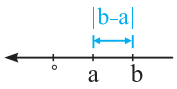
قدرمطلق

قدرمطلق عدد حقیقی x را با $|x|$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت‌های زیر تعریف می‌کنیم:

$$|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases} \quad , \quad |x|=\max\{x,-x\}$$

برای مثال داریم: $|\underbrace{3-\sqrt{2}}_{\text{مثبت}}|=3-\sqrt{2}$ و $|\underbrace{1-\sqrt{5}}_{\text{منفی}}|=-(1-\sqrt{5})=\sqrt{5}-1$.

از نظر هندسی، $|x|$ روی محور اعداد، فاصله‌ی متغیر x تا مبدأ است. به همین ترتیب $|a-b|$ فاصله‌ی دو عدد a و b از هم می‌باشد.



خواص قدرمطلق

۱ $|a|=|-a|$

۲ $|x|=a \xrightarrow{a\geq 0} x=\pm a$

۳ $|x|<a \Rightarrow -a<x<a$

۴ $|x|>a \Rightarrow x>a$ یا $x<-a$

۵ $|a|=|b| \Rightarrow a=\pm b$

۶ $\sqrt[n]{x^n}=\begin{cases} |x| & n \text{ زوج} \\ x & n \text{ فرد} \end{cases}$

۷ $|ab|=|a||b|$

۸ $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|} \ ; \ (b\neq 0)$

۹ $|x^n|=|x|^n$ و $|x^{2n}|=x^{2n}$ (n عدد طبیعی)

۱۰ $|a|<|b| \Rightarrow a^2<b^2$

۱۱ $-|x|\leq x\leq |x|$

تست: مجموع ریشه‌های معادله‌ی $|x-2|+2|x+1|=4$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) $\frac{11}{3}$

پاسخ: با توجه به جدول تعیین علامت، معادله را در سه حالت مختلف حل می‌کنیم:

x		-1		2	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$

$x<-1: -x-1-2x+4=4 \Rightarrow -3x=1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \xrightarrow{x<-1}$ جواب ندارد.

$-1\leq x\leq 2: x+1-2x+4=4 \Rightarrow -x=-1 \Rightarrow x=1$

$x>2: x+1+2x-4=4 \Rightarrow 3x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{3}$

این معادله دو جواب $x=1$ و $x=\frac{7}{3}$ دارد، در نتیجه مجموع ریشه‌ها برابر $\frac{7}{3}+1=\frac{10}{3}$ است. بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح می‌باشد.

تست: مجموعه جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} |x|<۲ \\ ۲x-۱<|x| \end{cases}$ به‌صورت بازه‌ی (α,β) می‌باشد. مقدار $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۳}$ ۲) -۱ ۳) $\frac{-۵}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ: دو نامعادله را حل کرده و بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$|x|<۲ \Rightarrow -۲<x<۲$$

$$|x|>۲x-۱ \Rightarrow x>۲x-۱ \text{ یا } x<-۲x+۱ \Rightarrow x<۱ \text{ یا } x<\frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x<۱$$

از اشتراک دو نامساوی $x<۱$ و $-۲<x<۲$ مجموعه جواب به‌صورت $-۲<x<۱$ در می‌آید، پس $\alpha+\beta=-۲+۱=-۱$. بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

تست: معادله‌ی $\sqrt{۱-|x|}=|x-\sqrt{x}|+x$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ: ابتدا دامنه‌ی معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt{۱-|x|}: ۱-|x|\geq ۰ \Rightarrow |x|\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq x\leq ۱ \quad , \quad \sqrt{x}: x\geq ۰$$

بنابراین دامنه برابر است با $۰\leq x\leq ۱$ که در این بازه $\sqrt{x}\geq x$ است. بنابراین:

$$x-(x-\sqrt{x})=\sqrt{۱-x} \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{۱-x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x=۱-x \Rightarrow ۲x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

پس معادله یک جواب دارد. بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

نامساوی مثلثی

برای هر دو عدد حقیقی a و b، همواره نامساوی $|a+b|\leq|a|+|b|$ برقرار است. این نامساوی به **نامساوی مثلثی** معروف است.

در نامساوی مثلثی حالت تساوی تنها در شرایطی برقرار است که a و b هم‌علامت باشند و یا حداقل یکی از آن‌ها صفر باشد، یعنی:

$$|a+b|=|a|+|b| \Leftrightarrow ab\geq ۰$$

هم‌چنین در حالتی که a و b غیرهم‌علامت باشند، داریم: $|a+b|<|a|+|b|$

نکته: نامساوی مثلثی برای n عضو به‌صورت مقابل درمی‌آید:

$$|a_۱+a_۲+\cdots+a_n|\leq|a_۱|+|a_۲|+\cdots+|a_n|$$

نکته: از نامساوی مثلثی به‌صورت کلی نتیجه مقابل را خواهیم گرفت:

$$\big||a|-|b|\big|\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$$

تست: مجموعه جواب معادله‌ی $|x^۴-۲۰|-|۲x^۲+۵|=|x^۴+۲x^۲-۱۵|$ به‌صورت بازه‌ی $[a,b]$ است. مقدار ab کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) -۵ ۴) ۵

پاسخ:

$$|x^۴+۲x^۲-۱۵|+|۲x^۲+۵|=|x^۴-۲۰| \xrightarrow{|a|=|-a|} \underbrace{|x^۴+۲x^۲-۱۵|}_{a}+\underbrace{|-۲x^۲-۵|}_{b}=\underbrace{|x^۴-۲۰|}_{a+b}$$

اگر $a=x^۴+۲x^۲-۱۵$ و $b=-۲x^۲-۵$ را درنظر بگیریم، با توجه به $|a|+|b|=|a+b|$ می‌توان نتیجه گرفت: $ab\geq ۰$. بنابراین:

$$(x^۴+۲x^۲-۱۵)(-۲x^۲-۵)\geq ۰ \Rightarrow (x^۲-۳)\underbrace{(x^۲+۵)}_{\text{همواره مثبت}}(۲x^۲+۵)\leq ۰ \Rightarrow x^۲-۳\leq ۰ \Rightarrow x^۲\leq ۳ \Rightarrow -\sqrt{۳}\leq x\leq\sqrt{۳} \Rightarrow ab=(-\sqrt{۳})(\sqrt{۳})=-۳$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

نکته: هنگامی‌که $a<x<b$، در صورتی که بخواهیم عدد k را طوری پیدا کنیم که $|x|<k$ باشد، باید $k\geq\max\{|a|,|b|\}$ و در نتیجه $\min k=\max\{|a|,|b|\}$.

تست: اگر $A=\{۳\sin x+۱ \mid x\in[\pi,۲\pi]\}$ مفروض باشد و هر عضو از مجموعه‌ی A در نامساوی $|x|\leq k$ صدق کند، حداقل عدد k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ:

$$x\in[\pi,۲\pi] \Rightarrow -۱\leq\sin x\leq ۰ \Rightarrow -۳\leq ۳\sin x\leq ۰ \Rightarrow -۲\leq ۳\sin x+۱\leq ۱$$

پس مجموعه‌ی A به‌صورت $A=[-۲,۱]$ می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$\min k=\max\{|-۲|,|۱|\}=۲$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

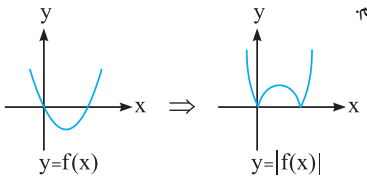
رسم نمودارهای قدرمطلقی

برای رسم نمودارهایی که شامل قدرمطلق هستند، می‌توانیم از مطالب و نکات صفحه‌ی بعد استفاده کنیم. اگر صورت سؤال طوری باشد که رسم نمودار به کمک این نکات امکان‌پذیر نباشد، می‌توان به کمک تعیین علامت و بازه‌بندی، نمودار را رسم کرد.

رسم نمودار $y=|f(x)|$: ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس قرینه‌ی قسمتی از نمودار این تابع را که زیر محور xها قرار دارد نسبت به محور xها به‌دست می‌آوریم و بخش پایین محور xها را حذف می‌کنیم.

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq 0 \\ -f(x) & f(x)<0 \end{cases}$$

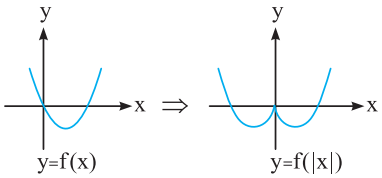
به مثال روبه‌رو توجه کنید:



رسم نمودار $y=f(|x|)$: ابتدا نمودار $y=f(x)$ را به ازای $x\geq 0$ رسم کرده، سپس قرینه‌ی این نمودار را نسبت به محور yها به‌دست می‌آوریم.

$$y=f(|x|)\Rightarrow\begin{cases} y=f(x) & x\geq 0 \\ y=f(-x) & x<0 \end{cases}$$

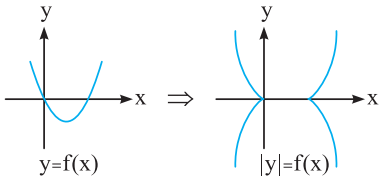
به مثال زیر توجه کنید:



رسم نمودار $|y|=f(x)$: ابتدا نمودار $y=f(x)$ را به ازای $y\geq 0$ رسم کرده، سپس قرینه‌ی این نمودار را نسبت به محور xها به‌دست می‌آوریم.

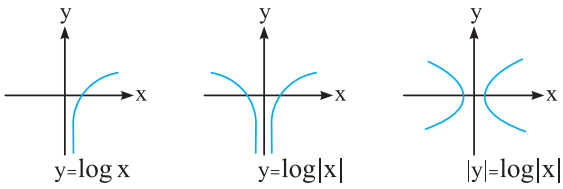
$$|y|=f(x)\Rightarrow\begin{cases} y=f(x) & y\geq 0 \\ y=-f(x) & y<0 \end{cases}$$

به مثال روبه‌رو توجه کنید:



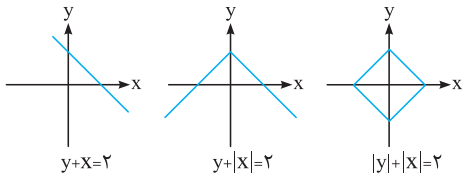
مثال: نمودار رابطه‌ی $|y|=\log|x|$ را رسم کنید.

پاسخ: مراحل رسم به‌صورت زیر است:



مثال: نمودار رابطه‌ی $|x|+|y|=2$ را رسم کنید.

پاسخ: مراحل رسم به صورت روبه‌رو است:



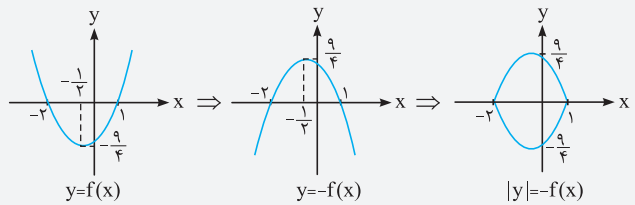
نمودار $|x|+|y|=2$ نمودار مربع است که در صفحات بعد، به شکل کامل بررسی خواهیم کرد.

تست: اگر $f(x)=x^2+x-2$ باشد، نمودار منحنی $|y|=-f(x)$ چند محور تقارن دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) محور تقارن ندارد.

پاسخ: ابتدا نمودار سهمی $f(x)$ را با توجه به مختصات رأس سهمی مشخص می‌کنیم:

$$S\left(\frac{-b}{2a},f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)\Rightarrow S\left(\frac{-1}{2},\frac{-9}{4}\right)$$



پس منحنی دارای دو محور تقارن $x=-\frac{1}{2}$ و $y=0$ (محور xها) می‌باشد. بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

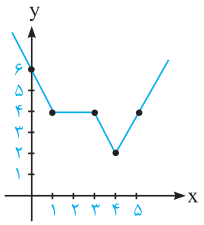
رسم نمودار توابع به شکل کلی $f(x)=k_1|x-a_1|+k_2|x-a_2|+\cdots+k_n|x-a_n|$

برای رسم این توابع ابتدا نقاط به طول ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها را به‌دست آورده و به هم وصل می‌کنیم، سپس یک نقطه با طول بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه و یک نقطه با طول کوچک‌تر از کوچک‌ترین ریشه را پیدا کرده و به دو سر نمودار وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم. بدیهی است شیب نیم‌خط ابتدایی $-(k_1+k_2+\cdots+k_n)$ و شیب نیم‌خط انتهایی $(k_1+k_2+\cdots+k_n)$ است.

مثال: نمودار تابع $y=|x-1|-|x-3|+2|x-4|$ را رسم کنید.

پاسخ: ریشه‌ی درون قدرمطلق‌ها که همان نقاط شکستگی تابع‌اند را در تابع قرار داده تا عرض نظیرشان به‌دست آید. کوچک‌ترین ریشه $x=1$ و بزرگ‌ترین ریشه $x=4$ است، پس نقاط $x=0$ و $x=5$ را نیز در تابع قرار می‌دهیم:

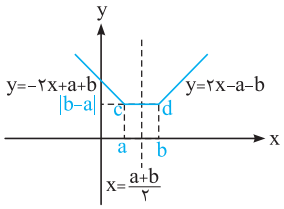
$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow y=4 \\ x=3 \Rightarrow y=4 \\ x=4 \Rightarrow y=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=6 \\ x=5 \Rightarrow y=4 \end{cases}$$



نمودار $y=|x-a|+|x-b| \quad (a \neq b)$

این توابع که به توابع گلدانی معروف‌اند همواره شامل دو نیم‌خط به شیب‌های ۲ و ۲- و یک پاره‌خط افقی به معادله‌ی $y=|b-a|$ است. با فرض $a<b$ و تعیین علامت آن، تابع به‌صورت چندضابطه‌ای زیر در می‌آید:

$$y=\begin{cases} x-a+x-b=2x-a-b & x>b \\ x-a-x+b=b-a & a \le x \le b \\ -x+a-x+b=-2x+a+b & x<a \end{cases}$$



ویژگی‌های این تابع عبارت‌اند از:

۱ دامنه‌ی این تابع برابر $\mathbb{R}$ و برد آن بازه‌ی $[|b-a|,+\infty)$ است.

۲ دارای محور تقارن به معادله‌ی $x=\frac{a+b}{2}$ است.

۳ اگر $a=-b$ تابع به‌صورت $y=|x-a|+|x+a|$ درمی‌آید که تابع زوج است.

۴ چهارضلعی abdc همواره یک مربع است.

روش رسم سریع تابع گلدانی

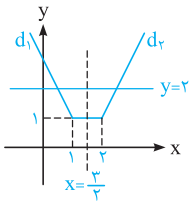
ابتدا ریشه‌های درون قدرمطلق‌ها، یعنی a و b را در تابع قرار داده تا عرض نظیرشان به‌دست آید. این دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم تا کف گلدان رسم شود. سپس از دو سر آن، دو نیم‌خط به شیب‌های ۲ و ۲- رسم می‌کنیم.

مثال: تابع $y=|x-1|+|x-2|$ مفروض است.

الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) معادله‌ی محور تقارن تابع را بنویسید.

پ) مختصات نقطه‌ی تلاقی تابع و خط $y=2$ را به‌دست آورید.



پاسخ: الف) با توجه به مطالب بالا، نقاط به مختصات $(1,1)$ و $(2,1)$ را به هم وصل کرده و از دو سر آن، دو نیم‌خط به شیب‌های ۲ و ۲- رسم می‌کنیم:

ب) معادله‌ی محور تقارن تابع برابر است با: $x=\frac{a+b}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$

پ) برای تعیین نقاط تلاقی تابع و خط $y=2$، باید معادلات نیم‌خط‌های d_1 و d_2 را به‌دست آوریم:

$$x<1: y=-x+1-x+2 \Rightarrow y=-2x+3 \xrightarrow{y=2} -2x+3=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

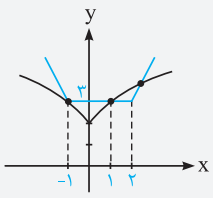
$$x>2: y=x-1+x-2 \Rightarrow y=2x-3 \xrightarrow{y=2} 2x-3=2 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

بنابراین تابع، خط $y=2$ را در نقاط $(\frac{1}{2},2)$ و $(\frac{5}{2},2)$ قطع می‌کند.

تست: تعداد ریشه‌های معادله‌ی $\sqrt{|x|}+2=|x-2|+|x+1|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: نمودار توابع $y=|x-2|+|x+1|$ و $y=\sqrt{|x|}+2$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. برای رسم $y=\sqrt{|x|}+2$ ابتدا نمودار $y=\sqrt{x}+2$ را رسم کرده و سپس (چون $\sqrt{x}+2$ فقط در $x \ge 0$ تعریف شده) قرینه‌ی منحنی را نسبت به محور y ها به‌دست می‌آوریم.



با توجه به شکل، دو تابع در سه نقطه مشترک‌اند. بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

تست: خط $x=-1$ محور تقارن $y=|3x-1|+|3x+a|$ است. مقدار عددی a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

پاسخ:

$$y=۳\left(\left|x-\frac{۱}{۳}\right|+\left|x+\frac{a}{۳}\right|\right)$$

محور تقارن تابع $f(x)=\left|x-\frac{۱}{۳}\right|+\left|x+\frac{a}{۳}\right|$ برابر است با $x=\frac{\frac{۱}{۳}+\left(-\frac{a}{۳}\right)}{۲}$. حال اگر عرض نقاط نمودار ۳ برابر شود، روی محور تقارن تأثیری نمی‌گذارد. بنابراین:

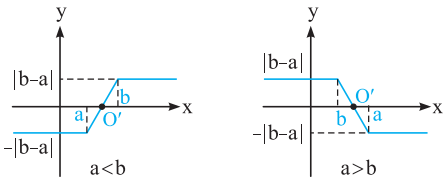
$$\frac{\frac{۱}{۳}-\frac{a}{۳}}{۲}=-۱\Rightarrow\frac{۱-a}{۶}=-۱\Rightarrow ۱-a=-۶\Rightarrow a=۷$$

پس گزینه‌ی (۳) صحیح است.

نکته: محور تقارن توابع $y=f(x)$ و $y=kf(x)\ (k\neq ۰)$ بر هم منطبق‌اند.

نمودار $y=|x-a|-|x-b|\ (a\neq b)$

این توابع با شرط $a\neq b$ همواره شامل دو نیم‌خط افقی و یک پاره‌خط به شیب ۲ یا ۲- است که نمودار آن به یکی از دو صورت مقابل می‌باشد:



ویژگی‌های این تابع عبارت‌اند از:

۱ دامنه‌ی تابع برابر $\mathbb{R}$ و برد آن بازه‌ی $[-|b-a|,|b-a|]$ است.

۲ دارای مرکز تقارن به مختصات $O'\left(\frac{a+b}{۲},۰\right)$ است.

۳ اگر $a=-b$ باشد، تابع به‌صورت $y=|x-a|-|x+a|$ در می‌آید که یک تابع فرد است.

تست: برد تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{۹}{|x-۱|-|x+۲|}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: با توجه به مطالب قبل، برد تابع $f(x)=|x-۱|-|x+۲|$ بازه‌ی $[-۳,۳]$ است. بنابراین برد $y=\frac{۹}{f}$ را در دو بازه‌ی جداگانه‌ی زیر محاسبه می‌کنیم:

$$-۳\leq f<۰\Rightarrow -\infty<\frac{۱}{f}\leq-\frac{۱}{۳}\Rightarrow -\infty<\frac{۹}{f}\leq-۳\Rightarrow -\infty<y\leq-۳$$

$$۰<f\leq۳\Rightarrow\frac{۱}{۳}\leq\frac{۱}{f}<+\infty\Rightarrow ۳\leq\frac{۹}{f}<+\infty\Rightarrow ۳\leq y<+\infty$$

پس برد تابع به‌صورت $(-\infty,-۳]\cup[۳,+\infty)$ است که اعداد صحیح $\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$ را در بر نمی‌گیرد. بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

روش رسم سریع تابع $y=|x-a|-|x-b|$

ابتدا ریشه‌های درون قدرمطلق یعنی a و b را در تابع قرار داده تا عرض نظیرشان به‌دست آید، سپس این دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم و از دو سر پاره‌خط به‌دست آمده، دو نیم‌خط افقی رسم می‌کنیم تا نمودار حاصل به‌صورت ⎍ یا ⎎ درآید.

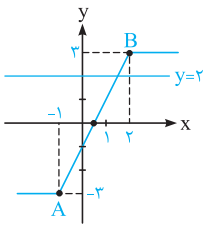
مثال: تابع $y=|x+۱|-|x-۲|$ مفروض است.

الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) مختصات مرکز تقارن تابع را بنویسید.

پ) مختصات نقطه‌ی تلاقی تابع و خط $y=۲$ را به‌دست آورید.

پاسخ: الف) با توجه به مطالب بالا، نقاط به مختصات $(-۳,-۱)$ و $(۲,۳)$ را به هم وصل کرده و از دو سر آن، دو نیم‌خط افقی رسم می‌کنیم:



ب) مختصات مرکز تقارن تابع برابر است با: $O'\left(\frac{a+b}{۲},۰\right)\Rightarrow O'\left(\frac{۱}{۲},۰\right)$

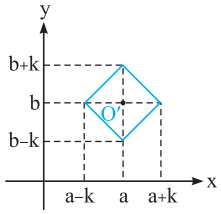
پ) برای تعیین نقطه‌ی تلاقی تابع و خط $y=۲$، باید معادله‌ی پاره‌خط AB را به‌دست آوریم:

$$-۱<x<۲\Rightarrow y=x+۱+x-۲\Rightarrow y=۲x-۱\xrightarrow{y=۲}۲x-۱=۲\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

بنابراین تابع، خط $y=۲$ را در نقطه‌ی $\left(\frac{۳}{۲},۲\right)$ قطع می‌کند.

نمودار $|x-a|+|y-b|=k\ (k>۰)$

نمودار رابطه‌ی $|x-a|+|y-b|=k$ همواره به‌صورت یک مربع به مرکز $O'(a,b)$ و قطر $۲k$ می‌باشد. برای رسم نمودار آن ابتدا مرکز مربع یعنی $O'(a,b)$ را مشخص می‌کنیم. سپس از چپ، راست، بالا و پایین به اندازه‌ی k واحد پیش می‌رویم تا چهار رأس آن به‌دست آید.



با توجه به این مطالب می‌توان نتیجه گرفت که طول ضلع مربع، $\sqrt{۲}k$ و مساحت مربع، $۲k^۲$ است.

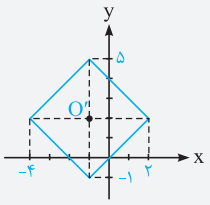
تست: به ازای چه مقادیری از b، خط $y=b$ نمودار $|x+۱|+|y-۲|=۳$ را قطع نمی‌کند؟

۱) $b<-۱$ یا $b>۵$

۲) $b<۱$ یا $b>۳$

۳) $b<۱$ یا $b>۵$

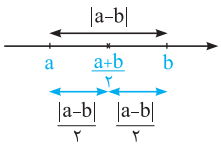
۴) $b<-۱$ یا $b>۳$



پاسخ: نمودار $|x+۱|+|y-۲|=۳$ به‌صورت یک مربع به مرکز $O'(-۱,۲)$ و قطر ۶ است که نمودار آن به‌صورت مقابل می‌باشد. پس خط $y=b$ به ازای $b<-۱$ یا $b>۵$ نمودار را قطع نمی‌کند. بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

نکته: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه داریم:

$$\max\{a,b\}=\frac{a+b}{۲}+\frac{|a-b|}{۲} \qquad \min\{a,b\}=\frac{a+b}{۲}-\frac{|a-b|}{۲}$$



برای آن که دو رابطه‌ی بالا را به خاطر بسپارید، از نمودار مقابل کمک بگیرید. در این جا $b>a$ است، پس اگر به $\frac{a+b}{۲}$ یعنی وسط a و b به اندازه‌ی شعاع، یعنی $\frac{|a-b|}{۲}$ اضافه کنیم به $\frac{a+b}{۲}+\frac{|a-b|}{۲}=b$، یعنی به ماکزیمم می‌رسیم و اگر همین مقدار را کم کنیم، به می‌نیمم می‌رسیم.

تست: تعداد ریشه‌های معادله‌ی $|۲x|=\min\{x+۲,۴\}$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

پاسخ: راه حل اول:

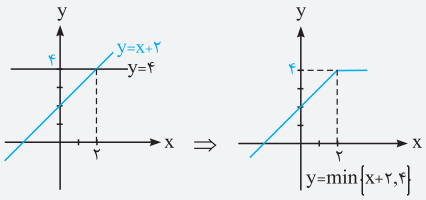
$$\frac{x+۶}{۲}-\frac{|x-۲|}{۲}=|۲x|\Rightarrow x+۶-|x-۲|=|۴x|$$

$$x\geq ۲: x+۶-x+۲=۴x\Rightarrow ۴x=۸\Rightarrow x=۲$$

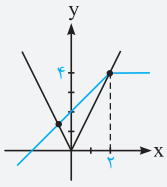
$$۰<x<۲: x+۶+x-۲=۴x\Rightarrow ۲x=۴\Rightarrow x=۲ \text{ غ‌ق‌ق}$$

$$x\leq ۰: x+۶+x-۲=-۴x\Rightarrow ۶x=-۴\Rightarrow x=-\frac{۲}{۳}$$

پس ریشه‌های معادله $x=۲$ و $x=\frac{-۲}{۳}$ است و گزینه‌ی (۲) صحیح است.



راه حل دوم: نمودار توابع $y=|۲x|$ و $y=\min\{x+۲,۴\}$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:

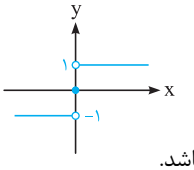


دو نمودار همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند، پس معادله دو ریشه دارد. بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

تابع علامت

تابع علامت را با نماد $\text{sgn}(x)$ نشان می‌دهیم که به‌صورت دو یا سه ضابطه‌ای به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\text{sgn}(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ -۱ & x<۰\end{cases} \qquad \text{sgn}(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$$



دامنه‌ی این تابع برابر $\mathbb{R}$ و برد آن مجموعه‌ی $\{-۱,۰,۱\}$ می‌باشد.

توجه داشته باشید که برای رسم یا بررسی تابع $y=\text{sgn}(f(x))$ بهتر است $f(x)$ را تعیین علامت کنید.

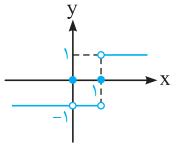
مثال: نمودار تابع $y=\text{sgn}(x^۳-x^۲)$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا $x^۳-x^۲$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^۳-x^۲=x^۲(x-۱)=۰\Rightarrow x=۰,x=۱$$

x		۰		۱	
$x^۲(x-۱)$	-	۰	-	۰	+

$$y=\begin{cases}۱ & x>۱\\ ۰ & x=۰,۱\\ -۱ & ۰<x<۱ \text{ یا } x<۰\end{cases}$$



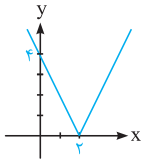
مثال: نمودار تابع $f(x)=(2x-4)\operatorname{sgn}(2x-4)$ را رسم کنید.

پاسخ: تابع را به صورت چندضابطه‌ای نوشته و آن را رسم می‌کنیم:

$$2x-4=0\Rightarrow x=2$$

x		2	
$2x-4$	$-$	0	$+$

$$\operatorname{sgn}(2x-4)=\begin{cases}1 & x>2\\ 0 & x=2\\ -1 & x<2\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}2x-4 & x>2\\ 0 & x=2\\ -(2x-4) & x<2\end{cases}$$



نکته: با توجه به تعریف تابع علامت داریم:

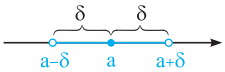
$$x\operatorname{sgn}x=|x|\Rightarrow f(x)\operatorname{sgn}f(x)=|f(x)|$$

بازه‌های اعداد و همسایگی

بازه‌ی باز $(a,b)=\{x:a<x<b\}$ مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از a و کوچک‌تر از b است که این نقاط را، نقاط درونی بازه‌ی (a,b) می‌گویند و a و b را نقاط ابتدا و انتهای بازه می‌نامند. بازه‌هایی که شامل نقاط ابتدا و انتهایی خود باشند، بازه بسته به‌شکل $[a,b]=\{x:a\le x\le b\}$ می‌باشند. اگر بازه به‌صورت $[a,b)=\{x:a\le x<b\}$ یا $(a,b]=\{x:a<x\le b\}$ باشد، آن را نیم‌باز می‌گوییم. این چهار بازه‌ی ذکر شده همگی کران‌دار هستند. بازه‌هایی مانند $(a,+\infty)$، $(-\infty,a)$ و $(-\infty,+\infty)$ را بازه‌های بی‌کران می‌گوییم. علائم $+\infty$ و $-\infty$ نمایش اعداد حقیقی نبوده و فقط با آن‌ها می‌توان شرایط بی‌کران را خلاصه‌تر بیان کرد.

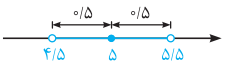
همسایگی: به هر بازه‌ی باز که شامل نقطه‌ی a باشد، یک همسایگی نقطه‌ی a می‌گوییم. مثلاً هرگاه $a\in(c,d)$ باشد، آن‌گاه بازه‌ی (c,d) را همسایگی a می‌نامند.

بازه‌ی متقارن (همسایگی متقارن): به بازه‌ی باز $(a-\delta,a+\delta)$ بازه‌ی متقارن a به شعاع δ گویند. $(\delta>0)$

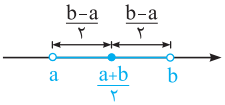


$$(a-\delta,a+\delta)=\{x\in\mathbb{R}:|x-a|<\delta\}$$

برای مثال بازه‌ی $(۴/۵,۵/۵)$ یک بازه‌ی متقارن به مرکز ۵ و شعاع ۰/۵ می‌باشد.

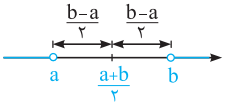


نکته: بازه‌ی (a,b) یک بازه‌ی متقارن به مرکز $\frac{a+b}{2}$ و شعاع $\frac{b-a}{2}$ است.



$$a<x<b\Leftrightarrow\left|x-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{b-a}{2}$$

تذکر: اگر $x>b$ یا $x<a$ را بخواهیم به‌صورت نامعادله‌ی قدرمطلقی بنویسیم، داریم:



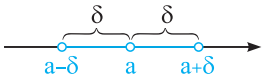
$$x<a\ \text{یا}\ x>b\Leftrightarrow\left|x-\frac{a+b}{2}\right|>\frac{b-a}{2}\qquad(a<b)$$

مثال: گزاره‌ی $x\notin(-۷,۹)$ را به‌صورت قدرمطلقی بنویسید.

پاسخ:

$$x\notin(-۷,۹)\Rightarrow x\le -۷\ \text{یا}\ x\ge ۹\Rightarrow\left|x-\frac{-۷+۹}{۲}\right|\ge\frac{۹-(-۷)}{۲}\Rightarrow|x-۱|\ge ۸$$

همسایگی محذوف متقارن: اگر مرکز بازه، یعنی عدد a را از بازه‌ی متقارن برداریم، به آن همسایگی محذوف متقارن گویند. همسایگی محذوف متقارن به سه صورت روبه‌رو نمایش داده می‌شود:



$$(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$$
$$\{x\in\mathbb{R}:0<|x-a|<\delta\}$$
$$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

تذکر: همسایگی محذوف متقارن یک بازه نیست، بلکه اجتماع دو بازه است.

تذکر: اجتماع یا اشتراک دو همسایگی متقارن (محذوف متقارن) عدد a، یک همسایگی متقارن (محذوف متقارن) عدد a است.

تذکر: تفاضل دو همسایگی نقطه‌ی a، یک همسایگی از a نیست.

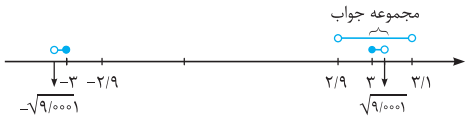
مثال: جواب‌هایی از نابرابری $\sqrt{x^۲-۹}<\frac{۱}{۱۰۰}$ را به‌دست آورید که در بازه‌ی متقارن $\left(۳-\frac{۱}{۱۰},۳+\frac{۱}{۱۰}\right)$ قرار دارند.

پاسخ: ابتدا دامنه را مشخص می‌کنیم:

$$x^۲-۹\ge ۰\Rightarrow x^۲\ge ۹\Rightarrow x\le -۳\ \text{یا}\ x\ge ۳$$

$$\sqrt{x^۲-۹}<\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow x^۲-۹<\frac{۱}{۱۰۰۰۰}\Rightarrow x^۲<۹/۰۰۰۱\Rightarrow -\sqrt{۹/۰۰۰۱}<x<\sqrt{۹/۰۰۰۱}$$

بنابراین مجموعه جواب نابرابری به‌صورت بازه‌های $(-\sqrt{۹/۰۰۰۱},-۳]\cup[۳,\sqrt{۹/۰۰۰۱})$ درمی‌آید که از اشتراک آن با بازه‌ی $\left(۳-\frac{۱}{۱۰},۳+\frac{۱}{۱۰}\right)$، مجموعه جواب این سؤال به‌صورت $[۳,\sqrt{۹/۰۰۰۱})$ درمی‌آید.



تست: اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی $|۲x - a^۲ + ۲| < \frac{۱-a}{۲}$، یک بازه‌ی متقارن به مرکز ۷ باشد، شعاع بازه‌ی متقارن $(a, a^۲)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: می‌دانیم $|x - \alpha| < r$، یک بازه‌ی متقارن به مرکز α و شعاع r است. بنابراین داریم:

$$|۲x - a^۲ + ۲| < \frac{۱-a}{۲} \Rightarrow |۲x - (a^۲ - ۲)| < \frac{۱-a}{۲} \Rightarrow \left|x - \frac{a^۲-۲}{۲}\right| < \frac{۱-a}{۴}$$

پس مرکز بازه‌ی متقارن $\frac{a^۲-۲}{۲}$ و شعاع آن $\frac{۱-a}{۴}$ است. در نتیجه:

$$\frac{a^۲-۲}{۲} = ۷ \Rightarrow a^۲ - ۲ = ۱۴ \Rightarrow a^۲ = ۱۶ \Rightarrow a = \pm ۴$$

اما به‌ازای $a = ۴$، شعاع بازه یعنی $\frac{۱-a}{۴}$ منفی می‌شود که قابل قبول نمی‌باشد، پس $a = -۴$ درست است.

$$a = -۴ \Rightarrow (a, a^۲) = (-۴, ۱۶) \Rightarrow \text{شعاع} = \frac{۱۶ - (-۴)}{۲} = ۱۰$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

تست: اگر $(۲a - b, ۳b) \cup (a, ۲b + ۱)$ یک همسایگی متقارن محذوف باشد، مقدار عددی ab کدام است؟ $(a > ۰)$

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۵ ۴) ۶

پاسخ: چون اجتماع، خاصیت جابه‌جایی دارد، پس به یکی از دو صورت زیر می‌توانیم بنویسیم:

الف) $(۲a - b, ۳b) \cup (a, ۲b + ۱) \Rightarrow ۳b = a = \frac{۲a - b + ۲b + ۱}{۲}$, $۲a = ۲a + b + ۱ \Rightarrow ۰ = b + ۱ \Rightarrow b = -۱ \xrightarrow{a=۳b} a = -۳$

اما در این حالت $a < ۰$ می‌شود که نادرست است.

ب) $(a, ۲b+۱) \cup (۲a - b, ۳b) \Rightarrow ۲b + ۱ = ۲a - b = \frac{a + ۳b}{۲}$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲b + ۱ = ۲a - b \Rightarrow ۳b = ۲a - ۱ \\ ۲b + ۱ = \frac{a + ۳b}{۲} \Rightarrow ۴b + ۲ = a + ۳b \Rightarrow b = a - ۲ \end{cases} \Rightarrow a = ۵ \ , \ b = ۳ \Rightarrow ab = ۱۵$$

در این حالت $a > ۰$ و بازه‌ها به‌صورت $(۵, ۷) \cup (۷, ۹)$ می‌شوند که درست می‌باشد، بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

تست: مجموعه جواب نامعادله‌ی $(۲x - ۱)\text{sgn}(۲x - ۱) > \max\{۳ - x, x - ۳\}$ یک بازه‌ی متقارن به شعاع r می‌باشد. مقدار r کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

پاسخ: می‌دانیم $u \,\text{sgn}\, u = |u|$ و همچنین $\max\{u, -u\} = |u|$، بنابراین:

$$|x - ۳| > |۲x - ۱| \Longrightarrow (x - ۳)^۲ > (۲x - ۱)^۲ \Rightarrow (x - ۳)^۲ - (۲x - ۱)^۲ > ۰ \Rightarrow (x - ۳ - ۲x + ۱)(x - ۳ + ۲x - ۱) > ۰$$

$$\Rightarrow (-x - ۲)(۳x - ۴) > ۰ \Rightarrow -۲ < x < \frac{۴}{۳} \Rightarrow r = \frac{\frac{۴}{۳} - (-۲)}{۲} = \frac{۵}{۳}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

توابع پله‌ای و تابع جزءصحیح

به هر تابعی که بتوان دامنه‌ی آن را به تعدادی بازه تقسیم کرد، به‌طوری که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها ثابت باشد، یک تابع پله‌ای می‌نامند. گونه‌ی خاصی از توابع پله‌ای، تابع جزءصحیح می‌باشد.

جزءصحیح (براکت)

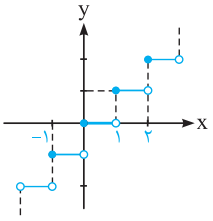
جزءصحیح: بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x را جزءصحیح x می‌نامند و به‌صورت روبه‌رو نمایش می‌دهیم: $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z}, n \le x\}$

بنابراین طبق تعریف جزءصحیح می‌توان گفت: $[x] = k \Leftrightarrow k \le x < k + ۱ \quad (k \in \mathbb{Z})$

جزءاعشار: اگر جزءصحیح یک عدد را از خود عدد کم کنیم، جزءاعشار آن به‌دست می‌آید که معمولاً با P_x نمایش می‌دهیم: $P_x = x - [x]$

توجه داشته باشید که همواره جزءاعشار بزرگ‌تر یا مساوی صفر و کوچک‌تر از یک است: $۰ \le x - [x] < ۱$

تابع $f(x) = [x]$: به کمک بازه‌بندی و تعریف جزءصحیح، نمودار تابع $y = [x]$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



$$f(x) = [x] = \begin{cases} \vdots & \\ -۱ & -۱ \le x < ۰ \\ ۰ & ۰ \le x < ۱ \\ ۱ & ۱ \le x < ۲ \\ \vdots & \end{cases}$$

تست: برای هر عدد طبیعی $n > 2$، حاصل $[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}]$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: **راه حل اول:** حاصل هریک را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$(n > 2)\ 4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 3n + 1 < 4n^2 \Rightarrow (2n-1)^2 < 4n^2 - 3n + 1 < (2n)^2$$

$$\Rightarrow 2n - 1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow \left[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}\right] = 2n - 1$$

$$(n > 2)\ n^2 - 4n + 4 < n^2 - 2n < n^2 - 2n + 1 \Rightarrow (n-2)^2 < n^2 - 2n < (n-1)^2 \Rightarrow n - 2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n - 1 \Rightarrow \left[\sqrt{n^2 - 2n}\right] = n - 2$$

$$\left[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}\right] - 2\left[\sqrt{n^2 - 2n}\right] = 2n - 1 - 2(n-2) = 2n - 1 - 2n + 4 = 3$$

راه حل دوم: (عددگذاری) با انتخاب $n = 3$ داریم:

$$[\sqrt{28}] - 2[\sqrt{3}] = 5 - 2 = 3$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

تست: اگر $f(x) = [(\sqrt{5} - \sqrt{3})^x] + \left[\log \frac{1}{x}\right] + [\tan^{-1} x]$، مقدار عددی $f(1396)$ کدام است؟

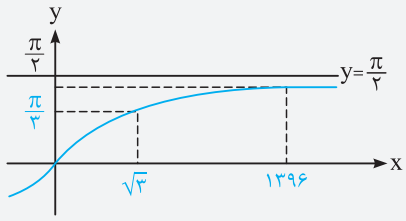
۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

پاسخ: حاصل هر یک از براکت‌ها را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$0 < \sqrt{5} - \sqrt{3} < 1 \Rightarrow 0 < (\sqrt{5} - \sqrt{3})^{1396} < 1 \Rightarrow [(\sqrt{5} - \sqrt{3})^{1396}] = 0 \qquad 10^3 < 1396 < 10^4 \Rightarrow 3 < \log 1396 < 4$$

$$\Rightarrow -4 < -\log 1396 < -3 \Rightarrow -4 < \log (1396)^{-1} < -3 \Rightarrow -4 < \log \frac{1}{1396} < -3 \Rightarrow \left[\log \frac{1}{1396}\right] = -4$$

با توجه به نمودار $y = \tan^{-1} x$، مقدار $[\tan^{-1} 1396]$ را حساب می‌کنیم:



$$\sqrt{3} < 1396 < +\infty \Rightarrow \frac{\pi}{3} < \tan^{-1} 1396 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow [\tan^{-1} 1396] = 1$$

$$\Rightarrow f(1396) = [(\sqrt{5} - \sqrt{3})^{1396}] + \left[\log \frac{1}{1396}\right] + [\tan^{-1} 1396] = 0 - 4 + 1 = -3$$

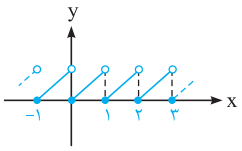
بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

ویژگی‌ها و نکات مربوط به جزءصحیح

۱ برای هر عدد حقیقی x داریم: $x - 1 < [x] \leq x$

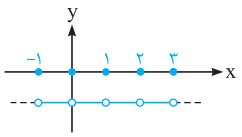
۲ اگر k یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه: $[x + k] = [x] + k$

۳ نمودار تابع $y = x - [x]$ به‌صورت زیر است:



با توجه به شکل، تابع $y = x - [x]$، یک تابع متناوب با دوره‌ی تناوب $T = 1$ است. دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ و برد آن $[0, 1)$ می‌باشد. پس همواره نامساوی $0 \leq x - [x] < 1$ برقرار است.

۴ تابع $y = [x] + [-x]$ به ازای اعداد صحیح، صفر و به ازای اعداد غیرصحیح، -1 است. در نتیجه نمودار آن به‌صورت مقابل می‌باشد:



$$y = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به این مطلب، $[-x]$ به‌صورت $[-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x] - 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ تعریف می‌شود.

۵ برای هر عدد حقیقی x داریم: $\left[x + \frac{1}{2}\right] + [x] = [2x]$ که برای اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ نیز می‌توان این تساوی را تعمیم داد:

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$$

رسم نمودار $y = [f(x)]$

برای رسم نمودار $y = [f(x)]$ از روی نمودار $y = f(x)$ به‌صورت زیر اقدام می‌کنیم:

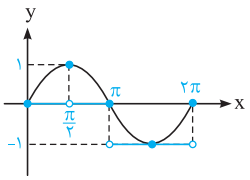
۱ نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم.

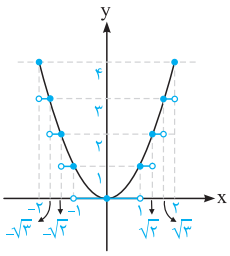
۲ خطوط افقی $y = k$ $(k \in \mathbb{Z})$ را رسم می‌کنیم تا نمودار $y = f(x)$ را قطع کنند.

۳ نقاط برخورد منحنی با خطوط افقی را مشخص کرده و نقاط بین دو خط متوالی را روی خط پایینی تصویر می‌کنیم.

مثال: نمودار توابع مقابل را رسم کنید. $0 \le x \le 2\pi$, ۲) $y = [\sin x]$ ۱) $y = [x^2]$

پاسخ:





البته این توابع را به‌وسیله‌ی بازه‌بندی نیز می‌توان رسم کرد که در مطلب بعدی به آن می‌پردازیم.

رسم توابع شامل جزءصحیح به‌صورت کلی

برای رسم توابع شامل جزءصحیح، با یک بازه‌بندی مناسب، تابع را به صورت چندضابطه‌ای بدون جزءصحیح نوشته و آن را رسم می‌کنیم. معمولاً بازه‌بندی براساس نقاط صحیح کننده‌ی درون براکت صورت می‌گیرد. برای مثال در تابع $f(x) = [ax]$، نقاط صحیح کننده‌ی درون براکت به صورت $x = \frac{k}{a} (ax = k \ , \ k \in \mathbb{Z})$ می‌باشند و نمودار به‌صورت پله‌ای درمی‌آید که طول هر پله‌ی آن $\frac{1}{a}$ است.

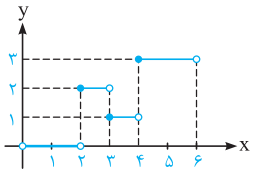
مثال: نمودار تابع $f(x) = 2\left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right]$ را در بازه‌ی $(0,6)$ رسم کنید.

پاسخ: نقاط مهم این تابع، یعنی نقاط صحیح کننده‌ی درون براکت را در بازه‌ی $(0,6)$ معلوم می‌کنیم:

$$\frac{x}{2} = k \Rightarrow x = 2k \Rightarrow x = 2,4 \ , \ \frac{x}{3} = k \Rightarrow x = 3k \Rightarrow x = 3$$

پس بازه‌بندی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$0 < x < 2 \Rightarrow f(x) = 2(0) - 0 = 0$$
$$2 \le x < 3 \Rightarrow f(x) = 2(1) - 0 = 2$$
$$3 \le x < 4 \Rightarrow f(x) = 2(1) - (1) = 1$$
$$4 \le x < 6 \Rightarrow f(x) = 2(2) - (1) = 3$$



مثال: مجموعه جواب معادله‌ی $[2x] - [x] = 3$ را به‌دست آورید.

پاسخ: به کمک رابطه‌ی $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] - [x] = 3 \Rightarrow \left[x + \frac{1}{2}\right] = 3 \Rightarrow 3 \le x + \frac{1}{2} < 4 \Rightarrow \frac{5}{2} \le x < \frac{7}{2}$$

تذکر: با شرط $a > 0$، $[x]$ و $[ax]$ هم علامت هستند.

مثال: مجموعه جواب معادله‌ی $[2x] + [x] = 0$ را به‌دست آورید.

پاسخ: با توجه به تذکر قبل، $[x]$ و $[2x]$ هم‌علامت هستند. پس زمانی جمع آن‌ها صفر می‌شود که هر کدام از آن‌ها برابر صفر شوند:

$$[x] = 0 \Rightarrow 0 \le x < 1$$
$$[2x] = 0 \Rightarrow 0 \le 2x < 1 \Rightarrow 0 \le x < \frac{1}{2}$$

از اشتراک دو نامساوی، مجموعه جواب به‌صورت بازه‌ی $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ درمی‌آید.

نکته: برای حل معادلات براکتی به شکل $[f(x)] = g(x)$ ابتدا به کمک تعریف، مجموعه جواب $g(x) \le f(x) < g(x) + 1$ را به‌دست می‌آوریم. سپس به کمک محدوده‌ی x به‌دست آمده، محدوده‌ی g را مشخص کرده تا مقادیر قابل قبول برای $[f(x)]$ به‌دست آید و جواب‌های معادله تعیین شود.

تذکر: در این نوع معادلات می‌توان به روش هندسی و رسم توابع $y = g(x)$ و $y = [f(x)]$ نیز تعداد جواب‌ها را به‌دست آورد.

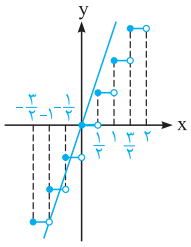
مثال: معادله‌ی $[2x] = 3x$ چند جواب دارد؟

راه حل اول: با شرط $3x \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$[2x] = 3x \Rightarrow 3x \le 2x < 3x + 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x \le 2x \Rightarrow x \le 0 \\ 2x < 3x + 1 \Rightarrow x > -1 \end{cases} \Rightarrow -1 < x \le 0$$

حال شرط $3x \in \mathbb{Z}$ را بررسی می‌کنیم:

$$-1 < x \le 0 \Rightarrow -3 < 3x \le 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \\ 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \\ 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$



راه حل دوم: نمودارهای $y = 3x$ و $y = [2x]$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل، معادله سه ریشه دارد.

مثال: حاصل عبارت $[y]-[x]-[x+y]$ را به‌دست آورید.

پاسخ: می‌دانیم $x=[x]+P_x$ و $y=[y]+P_y$ (P_x و P_y جزءاعشار x و y هستند.)

بنابراین داریم:

$$[[x]+P_x+[y]+P_y]-[x]-[y] \xrightarrow{[x],[y]\in\mathbb{Z}} [x]+[y]+[P_x+P_y]-[x]-[y]=[P_x+P_y]$$

حال با توجه به این‌که $0\le P_x<1$ و $0\le P_y<1$ هستند، داریم:

$$[P_x+P_y]=\begin{cases}0 & ;\ 0\le P_x+P_y<1\\ 1 & ;\ 1\le P_x+P_y<2\end{cases}$$

پس حاصل عبارت یا برابر صفر یا برابر یک است. با توجه به این مفهوم، نکته‌ی زیر را می‌توان نتیجه گرفت.

نکته: اگر P_x جزءاعشار x و P_y جزءاعشار y باشد، آن‌گاه داریم:

$$[x+y]=\begin{cases}[x]+[y] & ;\ 0\le P_x+P_y<1\\ [x]+[y]+1 & ;\ 1\le P_x+P_y<2\end{cases} \quad (P_x=x-[x], P_y=y-[y])$$

برای مثال اگر فرض کنیم $x=2/2$ و $y=5/4$، چون جمع جزء اعشار x و y بین صفر و یک است، پس $[5/4]+[2/2]=7$. اما در $[2/2+5/4]$ مورد اعداد $x=2/7$ و $y=5/4$، چون جمع جزءاعشارشان بین یک و دو است، پس داریم: $[2/7]+[5/4]=1+8=[2/7+5/4]$

تست: مجموعه جواب معادله‌ی $[x-2]+3[1-x]=6$ به‌صورت بازه‌ی (a,b) می‌باشد. مقدار $a-2b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: ابتدا اعداد صحیح را از درون براکت خارج می‌کنیم:

$$[x]-2+3(1+[-x])=6 \Rightarrow [x]+3[-x]=5$$

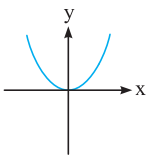
در دو حالت $x\in\mathbb{Z}$ و $x\notin\mathbb{Z}$ معادله را حل می‌کنیم:

با توجه به شرط $x\in\mathbb{Z}$ قابل قبول نیست. $\Rightarrow x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x+3(-x)=5 \Rightarrow -2x=5 \Rightarrow x=-\frac{5}{2}$

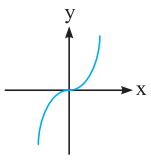
$$x\notin\mathbb{Z} \xrightarrow{[-x]=-1-[x]} [x]+3(-1-[x])=5 \Rightarrow -2[x]=8 \Rightarrow [x]=-4 \Rightarrow -4\le x<-3 \xrightarrow{x\notin\mathbb{Z}} -4<x<-3 \Rightarrow a-2b=-4-2(-3)=2$$

پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

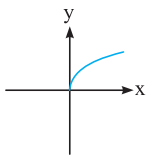
در سال‌های گذشته با نمودارهایی آشنا شدید که در این فصل به دفعات از آن استفاده می‌شود. در این قسمت به مرور این نمودارها می‌پردازیم:



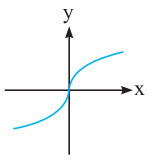
$y=x^2$
$D_y=\mathbb{R}$
$R_y=[0,+\infty)$



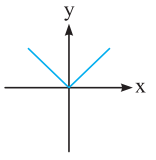
$y=x^3$
$D_y=\mathbb{R}$
$R_y=\mathbb{R}$



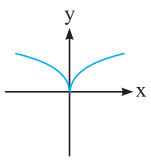
$y=\sqrt{x}$
$D_y=[0,+\infty)$
$R_y=[0,+\infty)$



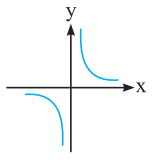
$y=\sqrt[3]{x}$
$D_y=\mathbb{R}$
$R_y=\mathbb{R}$



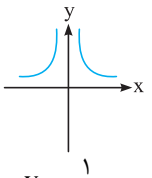
$y=|x|$
$D_y=\mathbb{R}$
$R_y=[0,+\infty)$



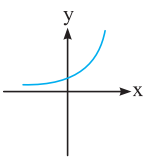
$y=\sqrt[3]{x^2}$
$D_y=\mathbb{R}$
$R_y=[0,+\infty)$



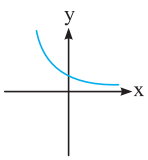
$y=\frac{1}{x}$
$D_y=\mathbb{R}-\{0\}$
$R_y=\mathbb{R}-\{0\}$



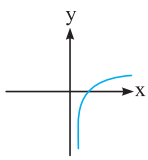
$y=\frac{1}{x^2}$
$D_y=\mathbb{R}-\{0\}$
$R_y=(0,+\infty)$



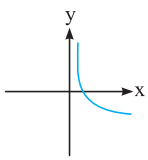
$y=a^x \quad (a>1)$
$D_y=\mathbb{R}$
$R_y=(0,+\infty)$



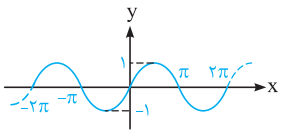
$y=a^x \quad (0<a<1)$
$D_y=\mathbb{R}$
$R_y=(0,+\infty)$



$y=\log_a x \quad (a>1)$
$D_y=(0,+\infty)$
$R_y=\mathbb{R}$



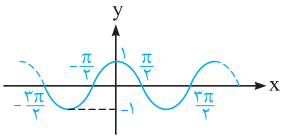
$y=\log_a^x \quad (0<a<1)$
$D_y=(0,+\infty)$
$R_y=\mathbb{R}$



$y = \sin x$

$D_y = \mathbb{R}$

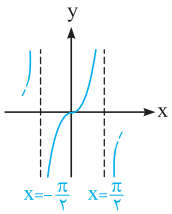
$R_y = [-1, 1]$



$y = \cos x$

$D_y = \mathbb{R}$

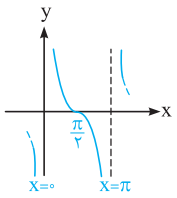
$R_y = [-1, 1]$



$y = \tan x$

$D_y = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$

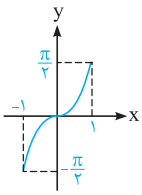
$R_y = \mathbb{R}$



$y = \cot x$

$D_y = \mathbb{R} - \{k\pi\}$ $(k \in \mathbb{Z})$

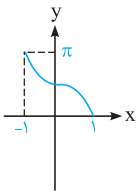
$R_y = \mathbb{R}$



$y = \sin^{-1} x$

$D_y = [-1, 1]$

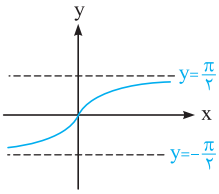
$R_y = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



$y = \cos^{-1} x$

$D_y = [-1, 1]$

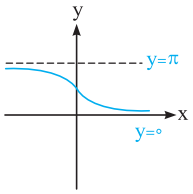
$R_y = [0, \pi]$



$y = \tan^{-1} x$

$D_y = \mathbb{R}$

$R_y = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$y = \cot^{-1} x$

$D_y = \mathbb{R}$

$R_y = (0, \pi)$

اول از همه خواص چیزی اعداد حقیقی رو بررسی می‌کنیم.

۱- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نسبت به جمع بسته است؟

۱) مجموعه‌ی اعداد اول
۲) مجموعه‌ی اعداد گویا
۳) مجموعه‌ی اعداد گنگ
۴) مجموعه‌ی اعداد صحیح که مضرب ۵ نیستند.

۲- مجموعه‌ی متناهی و غیرتهی A نسبت به عمل جمع بسته است. مجموعه‌ی $A \cup \{1\}$ نسبت به کدام عمل بسته است؟

۱) جمع
۲) ضرب
۳) جمع و ضرب
۴) تفریق

۳- اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، در روابط زیر کدام ویژگی اعداد حقیقی استفاده نشده است؟

$$y + [x + (-x + (-y))] = y + [(x + (-x)) + (-y)] = y + (0 + (-y)) = y + (-y) = 0$$

۱) توزیع‌پذیری
۲) شرکت‌پذیری
۳) وجود عضو قرینه
۴) وجود عضو همانی

۴- مجموعه‌ی $A = \left\{\frac{1}{k-3} : k \in \mathbb{Z} - \{3\}\right\}$، کدام ویژگی را ندارد؟

۱) نسبت به عمل ضرب بسته است.
۲) عضو همانی در عمل ضرب دارد.
۳) عضو وارون برای هر عضو دارد.
۴) عضو قرینه برای هر عضو دارد.

۵- مجموعه‌ی $A = \{\sqrt{5}k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$، کدام خاصیت زیر را دارد؟

۱) نسبت به عمل جمع بسته است.
۲) نسبت به عمل ضرب بسته است.
۳) عضو همانی در عمل جمع دارد.
۴) عضو همانی در عمل ضرب دارد.

۶- اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ رابطه‌ی $2x^2 + 4y^2 - 4(xy + 2x - 4) < \varepsilon$ برقرار باشد، مقدار xy کدام است؟

۱) ۸
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۲

۷- اگر به‌ازای هر عدد طبیعی n، رابطه‌ی $nx^2 - n|2x + 3| < 5$ برقرار باشد، مجموع جواب‌های قابل قبول برای x کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۸- اگر به‌ازای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $k^2 + 2k \leq a + 2 < -1 + \frac{2}{n}$، آن‌گاه مقدار عددی $a + k$ کدام است؟

۱) -1
۲) -2
۳) -3
۴) -4

۹- اگر برای هر $h > ۰$ داشته باشیم $a \in [b, b+h)$ و $\frac{b}{۲} + ۳\sqrt{ab} - ۲a + ۳ \leq ۳ < ۳ + h$، مجموع مقادیر a کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۸}{۳}$

۱۰- اگر به‌ازای هر عدد طبیعی n، نامساوی $۲ \leq x^۲ + ۵x - ۱ < \frac{۲n^۳ + ۵}{n^۳ + ۲}$ برقرار باشد، مجموع مقادیر قابل‌قبول برای x کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۵ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۱- اگر نامساوی $\left[\frac{۴n^۲ + ۳}{n^۲ + ۱}\right] \leq |x - ۲| < ۱ + \frac{۲n + ۳}{n + ۱}$ برای همه‌ی مقادیر طبیعی n برقرار باشد، حاصل جمع مقادیر x کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

در این‌جا چند تا تست از ویژگی‌های اعداد گویا و گنگ و بعدش تست‌های مربوط به بسط اعشاری متناوب ساده و مرکب رو داریم.

۱۲- اگر a عددی گویا و مخالف صفر و b عددی گنگ باشد، کدام‌یک از حکم‌های زیر ممکن است درست نباشد؟

۱) $ab^۲$ گویا است. ۲) ab گنگ است. ۳) $(a - b)$ گنگ است. ۴) $\frac{a}{b}$ گنگ است.

۱۳- اگر $a^۳$ گویا و $b^۴$ گنگ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $a + b$ حتماً گنگ است. ۲) $a - b^۴$ حتماً گنگ است. ۳) $\frac{a^{۳۰} + ۲}{b}$ حتماً گنگ است. ۴) $a^۶ + b^۴$ ممکن است گویا باشد.

۱۴- اگر α و β دو عدد گنگ مثبت باشند، چه تعداد از اعداد $\alpha - \beta$، $\alpha\beta^۳$، α^β و $\log_\beta \alpha$ حتماً گنگ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۵- اگر $\sqrt{۲a} - \sqrt{b}$ یک عدد گنگ و a و b اعداد طبیعی باشند، کدام گزینه قطعاً گنگ است؟

۱) $\sqrt{a} - \sqrt{۲b}$ ۲) $\sqrt{a} + \sqrt{۲b}$ ۳) $\sqrt{۸a} + ۲\sqrt{b}$ ۴) $\sqrt{۸a} - \sqrt{b}$

۱۶- اگر a و b گویا و داشته باشیم $\frac{a(\sqrt{b} - ۳)}{\sqrt{۳} - ۳} = \frac{۱}{۳}$، آن‌گاه $a + b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۱۰}{۳}$ ۳) ۶ ۴) $\frac{۲۰}{۳}$

۱۷- اگر برای اعداد گویای a و b داشته باشیم $\frac{۱}{a + b\sqrt{۵}} = \frac{۱}{\sqrt{۳} + \sqrt{۵}} + \frac{۱}{۱ + \sqrt{۳}}$، آن‌گاه حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۸- اگر α عددی گنگ باشد، آن‌گاه کدام‌یک از اعداد زیر همواره گنگ است؟

۱) $\frac{۳\alpha + ۲}{\alpha - ۱}$ ۲) $\alpha^۲ - ۳\alpha$ ۳) $\log\sqrt{\alpha}$ ۴) $\alpha^۳ + \alpha^۶$

۱۹- برای هر عدد اعشاری پایان‌ناپذیر غیرمتناوب β ، عدد گویای α یافت می‌شود که $\beta.f(\alpha)$ گویا شود. $f(\alpha)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\alpha^۲ + ۹$ ۲) $\alpha|\alpha| - ۳$ ۳) $\alpha^۲ + \alpha - ۲$ ۴) $\alpha^۳ - ۲$

۲۰- اگر a عدد اعشاری بی‌پایان و غیرمتناوب و b عدد اعشاری متناوب دارای کسر مولد باشد، کدام‌یک از اعداد زیر قطعاً گنگ خواهد بود؟ ([] نماد جزءصحیح است.)

۱) a^b ۲) $۳ab + ۳b - a - ۱$ ۳) $۵ab - a$ ۴) $a[b]$

۲۱- حاصل کسر $\frac{۰/۶۹\overline{۲}}{۰/۱\overline{۲۳۵}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۶۹۲}{۳۳۵}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۶۹۲}{۳۴۵}$

۲۲- با فرض $a = ۱/۲۵\overline{۷}$ و $b = ۰/۴۲\overline{۳}$، حاصل $a - b$ را به‌صورت کسر تحویل‌ناپذیر $\frac{p}{q}$ نوشته‌ایم، مجموع ارقام عدد p کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۲۳- اگر کسر مولد $۰/۲\overline{ab}$ برابر $\frac{۱۷}{۶۶}$ باشد، آن‌گاه کسر مولد $\overline{a/b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۶۸}{۹}$ ۲) $\frac{۵۲}{۹}$ ۳) $\frac{۳۴}{۹}$ ۴) $\frac{۶۲}{۹}$

۲۴- اگر $\frac{۱۸}{۱۱}$ کسر مولد عدد اعشاری $۱/a\overline{۳۶}$ باشد، کسر مولد عدد اعشاری $۱/\overline{a}$ کدام است؟

۱) $\frac{-۱}{۳}$ ۲) $\frac{-۵}{۳}$ ۳) $\frac{-۴}{۳}$ ۴) $\frac{-۳}{۲}$

۲۵- اگر دو عدد $۳a-۲$ و $a^۲+a$ نسبت به هم اول باشند و کسر مولد عدد اعشاری $۰/۵۸\overline{۳}$ به‌صورت $\frac{۳a-۲}{a^۲+a}$ باشد، عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۵

۲۶- اگر $۰/۵\overline{a}=\frac{b}{۱۱}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۲۷- بسط اعشاری کدام عدد زیر به‌صورت یک عدد اعشاری متناوب ساده است؟

۱) $\frac{۱۲۴}{۳۵}$ ۲) $\frac{۳۰}{۸۴}$ ۳) $\frac{۲۲۰}{۱۰۵}$ ۴) $\frac{۶۰}{۵۶}$

۲۸- اگر $۰/a\overline{۳b}+۰/b\overline{۳a}=\frac{۴}{۱۱}$ باشد، حاصل $۰/\overline{b}+۰/\overline{a}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۷}{۹}$

۲۹- اگر $\frac{b}{۸۱}$ کسر مولد عدد اعشاری $۰/۵\overline{a}$ باشد (a و b اعداد طبیعی)، آن‌گاه حاصل $۰/\overline{a}\times b$ کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۲۴

۳۰- اگر a و b اعدادی گویا باشند و داشته باشیم $b=\frac{(۲+\sqrt{۳})^۳}{a\sqrt{۳}+۱۲}$، آن‌گاه بسط اعشاری عدد a چگونه است؟ آزمایشی سنجش

۱) پایان‌پذیر
۲) پایان‌ناپذیر متناوب ساده
۳) پایان‌ناپذیر متناوب مرکب
۴) پایان‌ناپذیر غیرمتناوب

اگه قضیه‌ی هیپاسوس رو حفظی، این تست‌ها رو حل کن.

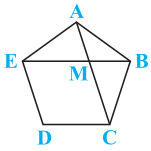
۳۱- اگر در یک پنج‌ضلعی منتظم، نسبت طول ضلع به قطر آن برابر با k باشد، حاصل عبارت $k+k^۲+k^۳+\cdots$ کدام است؟ آزمایشی سنجش

۱) $۲k$ ۲) $\frac{۱}{k}$ ۳) $k+۱$ ۴) $\frac{۱}{k+۱}$

۳۲- در یک پنج‌ضلعی منتظم، طول قطر گویا و طول ضلع $۳-\sqrt{x}$ است. x کدام عدد می‌تواند باشد؟

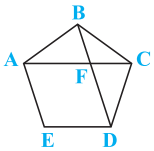
۱) ۳۶ ۲) ۵ ۳) ۴۱ ۴) ۴۵

۳۳- در پنج‌ضلعی منتظم مقابل به طول ضلع ۲، اندازه‌ی پاره‌خط‌های BM و MC به‌ترتیب چگونه‌اند؟



۱) گنگ ـ گویا
۲) گویا ـ گنگ
۳) گویا ـ گویا
۴) گنگ ـ گنگ

۳۴- در پنج‌ضلعی منتظم مقابل، اگر طول پاره‌خط FC برابر $۱-\sqrt{۵}$ باشد، محیط چهارضلعی AFDE کدام است؟



۱) ۴ ۲) $۴\sqrt{۵}+۴$ ۳) ۸ ۴) $۵+\sqrt{۵}$

فکر می‌کنم نامساوی‌ها رو حتماً بلدی، ولی بعضی از تست‌هاش خیلی سخته، با دقت این‌ها رو حل کن.

۳۵- اگر $۰>a>b$ باشد، کدام نامساوی همواره درست است؟

۱) $\frac{۱}{a-b}<۰$ ۲) $\sqrt[۳]{a^۲}>\sqrt[۳]{b^۲}$ ۳) $\frac{a}{b}<۱$ ۴) $a^۲-b<۰$

۳۶- اگر $a<۰<b$ باشد، کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱) $a|b|<۱$ ۲) $b^۲+۱>a$ ۳) $|b|<|a|$ ۴) $a>\frac{۱}{b}$

۳۷- اگر $\sqrt[۷]{a}>\sqrt{b}$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟ $(ab\neq ۰)$

۱) $\frac{۱}{a^۲}<\frac{۱}{b^۷}$ ۲) $a^۵>a^۳b^۷$ ۳) $a^۲>b^۷$ ۴) $a^۳>b^۲$

۳۸- اگر $a<b$ باشد، چند تا از عبارت‌های زیر همواره صحیح است؟

$ab^۲<b^۳$ $\quad$ $\frac{۱}{a}>\frac{۱}{b}$ $\quad$ $\frac{\sqrt[۳]{a}}{b^۲+۱}<\frac{\sqrt[۳]{b}}{b^۲+۱}$ $\quad$ $a^۵<b^۵$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۹- اگر a و b هم‌علامت باشند، حاصل عبارت $(a+b)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b})$ همواره کدام است؟

۱) مثبت ۲) منفی

۳) کوچک‌تر یا مساوی صفر ۴) بزرگ‌تر یا مساوی صفر

۴۰- رابطه‌ی $(۱+x)^n \geq ۱+nx$ به‌ازای هر x عضو بازه‌ی $[a,+\infty)$ برقرار می‌باشد، با فرض $n \in \mathbb{N}$ حداقل مقدار عدد a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) -۲

۴۱- اگر $x \geq -x^۲$ و $y^۲+۳y \leq -۲$، آن‌گاه کدام درست است؟

۱) $-۱ \leq x+y \leq ۱$ ۲) $-۲ \leq x+y \leq ۰$ ۳) $-۳ \leq x+y \leq -۱$ ۴) $-۲ \leq x+y \leq ۲$

۴۲- چه تعداد از نامساوی‌های مقابل صحیح‌اند؟ $\sqrt[۳]{۳} > \sqrt{۲}$ $\sqrt{۲} > \sqrt[۷]{۷}$ $\sqrt[۳]{۳} > \sqrt[۵]{۵}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۴۳- اگر برد تابع $y=f(x)$، بازه‌ی $[\frac{-۱}{۴},۳]$ باشد، برد تابع $y=\frac{۳}{f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نمی‌باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۴۴- طول بازه‌ی مجموعه جواب نامعادله‌ی $\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۲} < ۳$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۱

۴۵- در کدام بازه، نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x-۵}{۲x^۲+۳x+۲}$ بالاتر از نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{x}$ قرار می‌گیرد؟

۱) $(-\frac{۵}{۲},۰)$ ۲) $(-\frac{۱}{۴},۰)$ ۳) $(-\frac{۱}{۲},۱)$ ۴) $(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲})$

۴۶- مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{x^۲+x-۲}{(۱-x)\sqrt{x-۲}} > ۱$ کدام است؟ آزمایشی سنجش

۱) $\varnothing$ ۲) $x > ۲$ ۳) $x > ۵-\sqrt{۲}$ ۴) $۲ < x < ۵-\sqrt{۲}$

۴۷- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۳-۴x^۲-x+۴$ ؛ $x > -۱$ در بازه‌ی (a,b) زیر محور xها است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ ریاضی داخل ۸۸

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

۴۸- مجموعه جواب نامعادله‌ی $(\sqrt{۵}-\sqrt{۳})^{\sqrt{x^۲-۴x+۴}} > (\sqrt{۵}-\sqrt{۳})^{x^۲}$ به‌صورت بازه‌ی (a,b) است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۴۹- کدام‌یک از نامساوی‌های زیر درست است؟

۱) $\sqrt{۲۰}-\sqrt{۱۷} < \sqrt{۱۳}-\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۲۰}-\sqrt{۱۳} > \sqrt{۱۷}-\sqrt{۱۰}$

۳) $\sqrt{۱۴}-\sqrt{۱۱} > \sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۵}-\sqrt{۲} > \sqrt{۳}$

۵۰- بیشترین مقدار عبارت $x+\frac{۱}{x-۳}$ در صورتی‌که $x < ۳$ باشد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۵۱- کم‌ترین مقدار عبارت $\cot^۲ x+\frac{۱}{\cos^۲ x}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۲- از نامساوی $a < b$ کدام نامساوی زیر را همواره می‌توان نتیجه گرفت؟

۱) $\cot a > \cot b$ ۲) $\cot^{-۱} a > \cot^{-۱} b$

۳) $a|۲a-b| < b|۲a-b|$ ۴) $(a,b \neq ۰)a^{-۳} > b^{-۳}$

۵۳- اگر $a < b$ باشد، کدام نامساوی همواره برقرار است؟

۱) $a^۳-a+۱ < b^۳-b+۱$ ۲) $a^۳+a+۱ < b^۳+b+۱$ ۳) $a^۲+a < b^۲+b$ ۴) $a^۲-a < b^۲-b$

۵۴- اگر $۰ < a < ۱$ باشد، الزاماً کدام نابرابری درست است؟ آزمایشی سنجش

۱) $a^۳+a^۷ > a^۴+a^۶$ ۲) $a^۳+a^۸ > a^۴+a^۶$ ۳) $a^۳+a^۷ < a^۴+a^۶$ ۴) $a^۳+a^۸ < a^۴+a^۶$

۵۵- کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $a<b, c<d \Leftrightarrow a+c<b+d$
۲) $\sqrt{-a}<\sqrt{-b} \Leftrightarrow 0>a>b$
۳) $a<b, c<d \Leftrightarrow ac<bd$
۴) $(a,b\neq 0)\ a<b \Leftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

تست‌های این قسمت مربوط می‌شه به معادلات و نامعادلات قدرمطلقی که بعضی‌هاشون با خواص قدرمطلق، به خصوص نامساوی مثلثی ترکیب شده.

۵۶- اگر $a<0<b$ و $|a|>|b|$ باشد، حاصل عبارت $|a+b|+|a|+|b|$ کدام است؟

۱) $2a$ ۲) $2b$ ۳) $-2a$ ۴) $-2b$

۵۷- اگر نامساوی‌های $|x-1|<0/1$ و $A<2x-3<B$ معادل باشند، آن‌گاه $A+B$ کدام است؟

۱) $-2/1$ ۲) -2 ۳) $-1/1$ ۴) -1

۵۸- نامعادله‌ی $|2x-3|<x$ معادل کدام نامعادله است؟

۱) $|x-2|<1$ ۲) $|x-1|<2$ ۳) $0<|x-2|<1$ ۴) $0<|x-1|<1$

۵۹- اگر $|a|<|b|$ و b^3 منفی باشد، آن‌گاه کدام نامساوی همواره برقرار است؟

۱) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ ۲) $a^3<b^3$ ۳) $a>b$ ۴) $a^2>b^2$

۶۰- اگر $x^2<-x$ باشد، آن‌گاه حاصل $|x-2|+|2x-1|$ برابر کدام است؟ آزمایشی سنجش

۱) $-x-1$ ۲) $x+1$ ۳) $3x-3$ ۴) $3-3x$

۶۱- اگر $0<a<b$، آن‌گاه حاصل عبارت $\sqrt{a^4+b^4-2a^2b^2}+\sqrt{a^4+b^4+2a^2b^2}$ کدام است؟

۱) a^2-b^2 ۲) a^2+b^2 ۳) $2a^2$ ۴) $2b^2$

۶۲- معادله‌ی $|x^2-2x-1|=|x^2-2x+3|$:

۱) دو ریشه دارد. ۲) ریشه‌ی مضاعف دارد. ۳) بی‌شمار ریشه دارد. ۴) ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۶۳- مساحت محدود به نمودار تابع $y=3|x|+x-4$ و محور xها کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

۶۴- مجموعه جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases}|x^2-1|<8\\ |x+1|>2x-1\end{cases}$ به‌صورت $\alpha<x<\beta$ است، حاصل $\beta-\alpha$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) $\sqrt{2}+1$

۶۵- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $|(x+2)^2-\pi|=3/14$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -4 ۳) -8 ۴) -4π

۶۶- اگر $A=\left\{\frac{x}{2}\middle||2x+1|<5\right\}$ و به‌ازای هر $x\in A$، $|x|\leq k$ باشد، کم‌ترین مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۶۷- اگر کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقدار مجموعه‌ی $\left\{x^2\middle|x\in\mathbb{R}, |x|\leq\frac{x}{2}+1\right\}$ به‌ترتیب m و M باشد، حاصل $M-m$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{40}{9}$ ۳) $\frac{32}{9}$ ۴) ۴

۶۸- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $|x-1|+|x-2|+3=4$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) $-\frac{7}{2}$ ۴) صفر

۶۹- نمودار تابع $y=|x|-4$ در بازه‌ی (a,b) بالاتر از خط به معادله‌ی $2y+x=5$ قرار دارد. بزرگ‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶ ریاضی خارج ۸۶

۷۰- در بازه‌ای مقادیر تابع با ضابطه‌ی $y=x^2$، کم‌تر از مقادیر تابع با ضابطه‌ی $y=|x-2|$ است، آن بازه کدام است؟

۱) $(-2,1)$ ۲) $(-1,0)$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(0,1)$

۷۱- دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{\frac{x}{6}+|x|-4}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۷۲- مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x^2-2x|<x$ کدام بازه است؟ ریاضی خارج ۹۲

۱) $(0,1)$ ۲) $(0,3)$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(1,3)$

۷۳- مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x|<2x-5$ یا $(x-4)$، به کدام صورت است؟ ریاضی داخل ۹۲

۱) $(1,5)$ ۲) $(1-\sqrt{6},1+\sqrt{6})$ ۳) $(1,5)\cup(1+\sqrt{6},+\infty)$ ۴) $(-\infty,1-\sqrt{6})\cup(1,5)$

۷۴- در کدام بازه از مقادیر x، نمودار تابع $f(x)=5-|x-1|$ بالاتر از نمودار تابع $g(x)=|2x|$، قرار دارد؟ ریاضی خارج ۹۳

۱) $(-\frac{4}{3},1)$ ۲) $(-\frac{2}{3},1)$ ۳) $(-\frac{4}{3},2)$ ۴) $(-\frac{2}{3},2)$

۷۵- در بازه‌ی (a,b)، نمودار تابع $y=\sqrt{x+3}$ در بالای نمودار تابع $f(x)=2-|x-1|$ قرار دارد. بیشترین مقدار $(b-a)$ کدام است؟ ریاضی خارج ۹۴

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۷۶- جواب نامعادله‌ی $\frac{x|x|-1}{x+1}>2$ کدام است؟ آزمایشی سنجش

۱) $(-\infty,-1)$ ۲) $(3,+\infty)$ ۳) $\mathbb{R}-[0,3]$ ۴) $\mathbb{R}-[-1,3]$

۷۷- مساحت محصور به نمودار $f(x)=7-|x+1|-|x-3|$ و محور xها کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۵/۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۶/۵

۷۸- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $2(x-1)^2-3|x-1|+1=0$ کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

۷۹- خط $y=ax+b$ نمودار تابع $f(x)=3|x+2|-2x-|x-1|$ را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند. بیشترین مقدار $|a|+|b|$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۷

۸۰- کدام رابطه همواره درست نیست؟

۱) $|a+b|\le|a|+|b|$ ۲) $|a|-|b|\ge|a-b|$ ۳) $|a|-|b|\le|a+b|$ ۴) $|a-b|\le|a|+|b|$

۸۱- اگر رابطه‌ی $|x+y+z|\le|x|+|y|+|z|$ به رابطه‌ی تساوی تبدیل شود، الزاماً سه عدد غیرصفر x و y و z چگونه‌اند؟

۱) مساوی هم ۲) هم‌علامت ۳) مثبت ۴) منفی

۸۲- مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x+1|+|2x+5|>4+|2x-1|$ با مجموعه جواب کدام نامعادله برابر است؟

۱) $|2x+3|<3$ ۲) $|2x+2|<3$ ۳) $|2x+3|<4$ ۴) $|2x+2|<4$

۸۳- معادله‌ی $|x^3+x^2-4x-4|+|x^2-3x+2|=0$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۴- اگر $x+2\sqrt{x}\ge 3$ باشد، حاصل $\sqrt{4x^2-4x+1}-\sqrt{x^2-2x+1}$ کدام است؟ آزمایشی سنجش

۱) x ۲) $-x$ ۳) $2-3x$ ۴) $3x-2$

۸۵- در کدام بازه از مقادیر x، نمودار تابع $y=\sqrt{5+4x-x^2}$ در بالای نمودار تابع $y=2+|x-3|$ قرار دارد؟ ریاضی داخل ۹۳

۱) $(\frac{3-\sqrt{17}}{2},5)$ ۲) $(2,\frac{3+\sqrt{17}}{2})$ ۳) $(2,\frac{4+\sqrt{15}}{2})$ ۴) $(2,2+\sqrt{15})$

۸۶- اگر $A=\{1-5\cos x \mid x\in[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\}$ مفروض باشد و به ازای هر $a\in A$ داشته باشیم: $|a|\le k$، حداقل عدد k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸۷- اگر $A=\{x \mid x\in\mathbb{R}, \frac{|x^2+x-2|}{|x|-1}\le 0\}$ باشد و به‌ازای هر $x\in A$ داشته باشیم $|x|\le m$، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) حداقل مقدار m برابر ۱ است.
۲) حداقل مقدار m برابر ۲ است.
۳) حداکثر مقدار m برابر ۲ است.
۴) حداکثر مقدار m برابر ۱ است.

۸۸- اگر $x+\frac{1}{x}=7$ باشد، حاصل $\max\{(x-\frac{1}{x}),(\frac{1}{x}-x)\}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{5}$ ۲) $3\sqrt{5}$ ۳) $2\sqrt{7}$ ۴) $3\sqrt{7}$

۸۹- اگر برای هر $\varepsilon>0$ داشته باشیم $|x+||x|-1|<\varepsilon\le 0$، آن‌گاه جزءصحیح $11x$ کدام است؟

۱) -5 ۲) -6 ۳) -3 ۴) -4

۹۰- معادله‌ی $|x-\sqrt[4]{x}|+x=\sqrt[4]{1-x^2}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۹۱- مجموعه‌ی $A=\{x \mid x\in\mathbb{R}, |x+2|<4\}$ مفروض است. اگر بخواهیم هر عضو از مجموعه‌ی A $(a\in A)$ در نامساوی $\left|\frac{1}{a+10}\right|<k$ صدق کند، کدام گزینه صحیح است؟

۱) حداکثر k برابر $\frac{1}{12}$ ۲) حداکثر k برابر $\frac{1}{4}$ ۳) حداقل k برابر $\frac{1}{12}$ ۴) حداقل k برابر $\frac{1}{4}$

۹۲- اگر به‌ازای هر $x\in\mathbb{R}$، $A=\frac{x^2-x+1}{|x^2-1|+|x-2|}$ باشد، دقیق‌ترین محدوده‌ی A کدام است؟

۱) $A>0$ ۲) $0<A\leq 1$ ۳) $0<A<1$ ۴) $A\geq 1$

۹۳- مجموعه جواب معادله‌ی $\sqrt{x-9}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}=3$، شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) بی‌شمار

توابع $y=|x-a|+|x-b|$ و $y=|x-a|-|x-b|$ اهمیت زیادی دارن. واسه همین تست‌هاشونو به‌صورت جداگونه این‌جا آوردیم.

۹۴- مجموعه جواب معادله‌ی $\sqrt{4x^2+12x+9}+2\sqrt{x^2-4x+4}=5$ کدام است؟

۱) $(-1,0)$ ۲) $(0,\frac{1}{2})$ ۳) $(-\frac{3}{2},2)$ ۴) $\varnothing$

۹۵- چند نقطه روی محور طول‌ها وجود دارد که مجموع فاصله‌های هر کدام از آن‌ها از نقاط به طول‌های ۱- و ۴ واقع بر این محور برابر ۷ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۹۶- خط $x=-2$ محور تقارن تابع $y=|2x+1|+|2x+k|$ است. مقدار عددی k کدام است؟

۱) ۷- ۲) ۳- ۳) ۳ ۴) ۷

۹۷- اگر حاصل‌ضرب جواب‌های معادله‌ی $|x-2|+|x+1|=k$ برابر ۶- باشد، k کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

۹۸- اگر معادله‌ی $|x-2|-|x-4|=\frac{a+3}{2}$ فقط یک ریشه داشته باشد، محدوده‌ی a کدام است؟

۱) $-7<a<1$ ۲) $-6<a<2$ ۳) $-5<a<3$ ۴) $-4<a<4$

۹۹- طول خط شکسته‌ی نمودار تابع $y=|x|-|x-1|$ در بازه‌ی $-3\leq x\leq 3$ کدام است؟

۱) $3-\sqrt{3}$ ۲) $5-\sqrt{5}$ ۳) $3+\sqrt{3}$ ۴) $5+\sqrt{5}$

۱۰۰- اگر مرکز تقارن $y=2(|x+2|-|x-b|)$ روی محور تقارن $y=|x+3|+|x-1|$ قرار داشته باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳- ۳) صفر ۴) ۱

۱۰۱- مساحت ناحیه‌ی محدود بین منحنی $y=|x-2|+|x-1|$ و خط $y=x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۰۲- محور تقارن تابع $f(x)=2|x-3|+\sqrt{4x^2+8x+4}$، نمودار تابع را در نقطه‌ی A قطع می‌کند. فاصله‌ی A تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{17}$ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{53}$ ۴) $\sqrt{65}$ آزمایشی سنجش

۱۰۳- برد تابع $f(x)=\frac{6}{|x|+|x-2|}$ به‌صورت بازه‌ی $(a,b]$ است، $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۴- برد تابع $f(x)=\sqrt{|x-3|-|x+6|}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱۰ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۵- معادله‌ی $|2x+2|+2=|x-2|+m$ دو ریشه دارد. اگر تفاضل دو ریشه برابر ۴ باشد، مقدار m کدام است؟

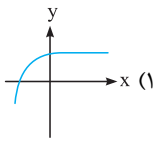
۱) ۱۰ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

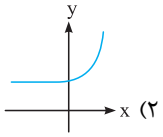
۱۰۶- تعداد جواب‌های معادله‌ی $|\tan^{-1}x|=|x|+|x-1|$ کدام است؟

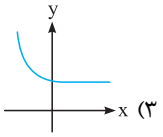
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

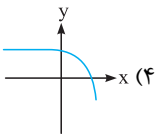
خُب حالا نمودارهای قدرمطلقی رو بیشتر کار می‌کنیم.

۱۰۷- نمایش هندسی تابع $y = x|x| - x^2 + 1$ شبیه نمودار کدام گزینه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۰۸- مساحت محصور بین نمودار تابع $y = (2x-1)\text{Sgn}(2x-1)$ و محورهای مختصات کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۰۹- تعداد نقاط تلاقی نمودارهای دو تابع $y = 3^{-x}$ و $y = 2 - |x|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۰- مساحت محدود به نمودار معادله‌ی $|x| + |y-2| = 3$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۱۱۱- اگر $f(x) = 3 - |x|$ باشد، سطح محصور بین نمودار $y = fof(x)$ و محور طول‌ها کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۲۷

۱۱۲- برای هر عدد حقیقی x رابطه‌ی $|x+1| + |x-1| \geq |x| + 2k$ برقرار است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) حداکثر مقدار k برابر ۲ است.
۲) حداکثر مقدار k برابر صفر است.
۳) حداقل مقدار k برابر ۲ است.
۴) حداقل مقدار k برابر صفر است.

۱۱۳- معادله‌ی $\log_8 |x| = |\cos x|$ چند جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

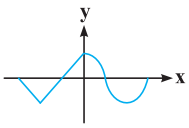
۱۱۴- معادله‌ی $(\frac{1}{2})^{|x|} - |\log x| = 0$ چند ریشه دارد؟

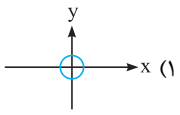
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

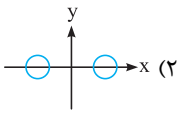
۱۱۵- تانژانت زاویه‌ی نمودار $y = \left|2x - |-x|\right|$ کدام است؟

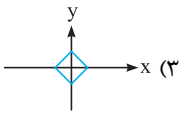
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

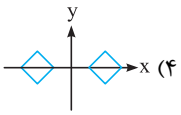
۱۱۶- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت روبه‌رو باشد، نمودار منحنی $|y| = -f(|x|)$ به کدام صورت است؟



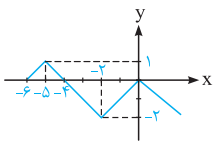
۱) 

۲) 

۳) 

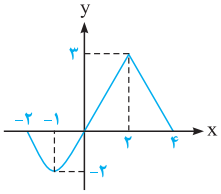
۴) 

۱۱۷- نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت مقابل می‌باشد. نمودار منحنی $|y| = f(x)$ چند محور تقارن دارد؟



۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۸- اگر نمودار $y = f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، معادله‌ی $|f(1-|x|)| = \frac{3}{2}$ چند جواب دارد؟



۱) ۶ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) ۵

۱۱۹- معادله‌ی $\cos^{-1}|x| = ||x|-1|$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۰- معادله‌ی $|x-1| - |x| = |x-3| - |\sin x|$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۲۱- معادله‌ی $x^4 + x^2 - 2|x| = 0$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۲- مساحت محصور بین نمودارهای $|y|-|x|\geq 2$ و $|y|\leq 3$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل توابع $y=\max\{f,g\}$ و $y=\min\{f,g\}$ بعضی وقت‌ها یه‌ذره وقت‌گیر می‌شه.

۱۲۳- اگر $f(x)=\max\{|x+1|,|2x|\}$، آن‌گاه می‌نیمم تابع $f(x)$ کدام است؟ ریاضی داخل ۹۲

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۲

۱۲۴- اگر $f(x)=\max\left\{x^2,\left|x-\frac{3}{4}\right|\right\}$، کم‌ترین مقدار تابع $f(x)$ کدام است؟ ریاضی خارج ۹۲

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۲۵- معادله‌ی $\max\{x+1,1\}=\min\{x^2,4-x^2\}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۶- نمودار تابع $y=\max\{|x|-2,1-|x-1|\}$ چند نقطه‌ی مشترک با نمودار $|y|+|x|=2$ دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

مهم‌ترین مطلب فصل صفر، بازه‌ی متقارن و همسایگی محذوف متقارن هست. اگه مفهوم درس رو خوب متوجه شده باشی، می‌تونی این تست‌ها رو راحت حل کنی.

۱۲۷- اگر مرکز بازه‌ی متقارن $|2x-2a+6|<a+2$ برابر ۵ باشد، شعاع آن کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۲۸- با فرض $\varepsilon>0$، کدام گزاره برای تعریف همسایگی محذوف متقارن برای a نادرست است؟

۱) $\{x\in\mathbb{R}:|x-a|<\varepsilon\}$ ۲) $\{x\in\mathbb{R}:0<|x-a|<\varepsilon\}$

۳) $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)-\{a\}$ ۴) $(a-\varepsilon,a)\cup(a,a+\varepsilon)$

۱۲۹- اگر اجتماع دو همسایگی متقارن یک عدد، یک همسایگی متقارن آن عدد باشد، آن‌گاه کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱) اشتراک دو همسایگی تهی است. ۲) اشتراک دو همسایگی برابر یکی از آن‌ها است.

۳) دو همسایگی برابرند. ۴) یکی از دو همسایگی تهی است.

۱۳۰- در همسایگی محذوف متقارن به‌صورت $(3a-7,a+5)-\{3\}$ شعاع همسایگی کدام است؟ ریاضی داخل ۸۹

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۱- اگر شعاع بازه‌ی متقارن $|2x-5|<b$ با شعاع همسایگی متقارن محذوف $(2a+5,-a+2)-\{2\}$ برابر باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۳۲- اگر $(3a-1,a+2b)\cup(a-b,b)$ یک همسایگی محذوف متقارن باشد، ab کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲- ۳) ۱- ۴) ۲

۱۳۳- اگر $(1,2x)-\{y\}$ و $(x,z)\cup(z,3)$ همسایگی محذوف برای یک عدد باشند، مقدار $x+y+z$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۳۴- مجموعه جواب کدام گزاره، یک بازه است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{4}{x^2}>1$ ۲) $0<|x+2|<1$ ۳) $[|x|]=0$ ۴) $|x|(1-x^2)>0$

۱۳۵- بازه‌ی I، یک بازه‌ی متقارن به مرکز $\frac{5}{2}$ و شعاع δ است. اگر I زیرمجموعه‌ی $\{x:|x-3|<2\}$ باشد، حداکثر مقدار δ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۳۶- یک بازه‌ی متقارن به مرکز $\frac{-5}{2}$ و شعاع r، زیرمجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $0<|x+3|<2$ می‌باشد. حداکثر مقدار r کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲/۵

۱۳۷- مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x-3|>|2x-1|$ به‌صورت $|3x+a|>b$ بیان شده است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟ آزمایشی سنجش

۱) $(5,1)$ ۲) $(1,5)$ ۳) $(3,4)$ ۴) $(4,3)$

۱۳۸- مجموعه جواب‌هایی از نابرابری $|x^۲-۴|<۱$ که در بازه‌ی متقارن $(-۲+\frac{۱}{۱۰},۲+\frac{۱}{۱۰})$ قرار دارد، کدام است؟

۱) $(۱/۹,۲/۱)$ ۲) $(۱/۹,۲)$ ۳) $(۰,\sqrt{۵})$ ۴) $(۱/۹,\sqrt{۵})$

۱۳۹- مجموعه جواب‌هایی از نامعادله‌ی $\sqrt{۵-x^۲}>۱/۲$ که در یک بازه‌ی متقارن ۲ به شعاع ۰/۲ قرار می‌گیرد به کدام صورت است؟

۱) $(۱/۸,۲/۲)$ ۲) $(\sqrt{۳/۵۶},\sqrt{۵})$ ۳) $(۱/۸,\sqrt{۵})$ ۴) $(\sqrt{۳/۵۶},۲/۲)$

۱۴۰- بازه‌ی I یک بازه‌ی متقارن به مرکز $\frac{۱}{۲}$ و شعاع δ است. اگر I زیرمجموعه‌ی $\{x: x^۴-۴x^۲<۰\}$ باشد، حداکثر مقدار δ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۴۱- یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع بیشترین مقدار ممکن زیرمجموعه‌ی $\left\{x:\left|\frac{x-۳}{۲x-۱}\right|>۱\right\}$ است، a کدام است؟ ریاضی خارج ۸۹

۱) $\frac{-۳}{۴}$ ۲) $\frac{-۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱}{۶}$

۱۴۲- چند همسایگی به‌صورت $(n^۲-۹۹,\frac{۲n}{n+۵})$ برای عدد یک وجود دارد؟ $(n\in\mathbb{N})$

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) بی‌شمار

۱۴۳- به‌ازای چند عدد طبیعی n، $(۰/۶۷\overline{۶},\frac{۲n+۵}{۳n+۳})$ معرف یک همسایگی می‌باشد؟

۱) ۹۸ ۲) ۹۹ ۳) ۱۰۰ ۴) بی‌شمار

۱۴۴- اگر n عدد طبیعی و $A_n=(-\frac{n+۱}{n},\frac{۲n+۱}{n})$، آن‌گاه $\bigcap_{n=۱}^{\infty}A_n$ کدام است؟

۱) $(-۱,۲)$ ۲) $[-۱,۲]$ ۳) $\{۲\}$ ۴) $(-۲,۳)$

۱۴۵- به‌ازای چند مقدار صحیح a، مجموعه جواب نامعادله‌ی $|۳x-۶|<۸$ یک بازه‌ی باز متقارن است؟ $a^۲-۲a-۸$

۱) ۷ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۵

۱۴۶- مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{۱}{x^۲-۵x+۴}>\frac{۱}{x^۲+x-۶}$ به‌ترتیب شامل چند بازه‌ی کران‌دار و چند بازه‌ی بی‌کران است؟

۱) ۲-۱ ۲) ۲-۲ ۳) ۳- صفر ۴) ۳-۱

۱۴۷- بازه‌ی متقارن $\frac{۱}{۲}$ به شعاع r، زیرمجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $|x|<\frac{x}{۳}+۱$ می‌باشد، حداکثر مقدار r کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۱/۷۵

۱۴۸- اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی $\max\{(۲\sqrt{x}-۳),(۳-۲\sqrt{x})\}<۱$ یک بازه‌ی متقارن به مرکز a و شعاع r باشد، $a+r$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۴۹- اگر $A=\{x|x\in\mathbb{R},|\sqrt{x}-۲|<|\sqrt{x}-۴|\}$ باشد و بدانیم $A-\{a,b\}$ معرف یک همسایگی متقارن محذوف می‌باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵

۱۵۰- $(a-۱,۲a+۱)$ یک بازه‌ی متقارن با نقطه‌ی میانی a است. اگر m و n دو عدد متعلق به این بازه باشند، کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $|m-n|<۳$ ۲) $|m-n|>۳$ ۳) $|m-n|<۶$ ۴) $|m-n|>۶$

۱۵۱- اگر همسایگی متقارن به مرکز $\sqrt{۲}$ و شعاع r شامل ۴ عدد صحیح مضرب ۳ باشد، حداکثر مقدار r کدام است؟

۱) ۶ ۲) $۶-\sqrt{۲}$ ۳) $۶+\sqrt{۲}$ ۴) $۶-۲\sqrt{۲}$

۱۵۲- $I_۱$ بازه‌ی متقارن $۲a$ به شعاع ۲ و $I_۲$ بازه‌ی متقارن $a^۲$ به شعاع ۶ است. اگر اجتماع $I_۱$ و $I_۲$ یک بازه‌ی متقارن باشد، a چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۵۳- اگر $I_۱$ یک بازه‌ی متقارن با نقطه‌ی میانی ۲ به شعاع $r_۱$، $I_۲$ یک بازه‌ی متقارن با نقطه‌ی میانی ۸ به شعاع $r_۲$ و $I_۱\cup I_۲$ یک بازه‌ی متقارن با نقطه‌ی میانی ۳/۵ باشد، آن‌گاه $|r_۱-r_۲|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱/۵ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۵۴- اگر $I=\{x\in\mathbb{R}\mid x^۲+۲x<۰\}$ و $I\cup(a,b)$ معرف یک همسایگی متقارن محذوف باشد، مقدار عددی $b-a$ کدام است؟ $(b<۰)$

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۵۵- جواب نامعادله‌ی $|x^۲+۲x+۳|<|x^۲+۲x-۳|$ یک همسایگی متقارن به مرکز α و شعاع β می‌باشد. $\beta-\alpha$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) -۱

۱۵۶- اگر x در یک بازه‌ی متقارن $\frac{-۹}{۲}$ به شعاع $\frac{۱}{۲}$ قرار داشته باشد، حاصل عبارت $A=\sqrt{x+۶+۲\sqrt{x+۵}}+\sqrt{x+۶-۲\sqrt{x+۵}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{x+۵}$ ۳) $۲\sqrt{x+۳}$ ۴) $۲\sqrt{x+۵}-۲$

۱۵۷- تمام جواب نامعادله‌ی $ax^۲+bx+۲>۰$ یک همسایگی متقارن به مرکز $\frac{۱}{۲}$ و شعاع $\frac{۳}{۲}$ می‌باشد. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۵۸- جواب نامعادله‌ی $\cos x\cot x<۰$ بر بازه‌ی $(۰,۲\pi)$ چه نوع همسایگی است؟

۱) همسایگی متقارن به مرکز $\frac{۳\pi}{۲}$ و شعاع $\frac{\pi}{۲}$

۲) همسایگی متقارن به مرکز π و شعاع $\frac{\pi}{۲}$

۳) همسایگی متقارن محذوف به مرکز $\frac{۳\pi}{۲}$ و شعاع $\frac{\pi}{۲}$

۴) همسایگی متقارن محذوف به مرکز π و شعاع $\frac{\pi}{۲}$

۱۵۹- اگر جواب نامعادله‌ی $\alpha<x(x+۳)<\beta$ معرف یک همسایگی متقارن محذوف به شعاع $\frac{۷}{۲}$ باشد، $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۷/۲۵ ۲) ۷/۵ ۳) ۷/۷۵ ۴) ۷/۱۲۵

۱۶۰- مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{۱}{ax^۲+x+b}>۴$ یک همسایگی محذوف متقارن به مرکز $\frac{-۱}{۲}$ می‌باشد. شعاع این همسایگی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

در کتاب درسی، مبحث جزءصحیح از مطالب فصل صفر برداشته شده، ولی از اون‌جایی که در فصل‌های بعدی فیلی از جزءصحیح استفاده می‌شه، ما این مطلب رو کامل می‌خونیم.

۱۶۱- مجموعه جواب معادله‌ی $\left[\frac{۲x-۱}{x}\right]=۳$ به‌صورت بازه‌ی $[a,b)$ می‌باشد. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{-۱}{۲}$ ۲) -۱ ۳) $\frac{-۳}{۲}$ ۴) صفر

۱۶۲- اگر جزء صحیح $(x^۲+x)$ برابر -۱ باشد، آن‌گاه $[x^{۲۰}]$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۶۳- اگر $A=\left\{x\in\mathbb{R}-\{۵\},\left[\frac{x}{۵}\right]=۱\right\}$ مفروض باشد، آن‌گاه کوچک‌ترین همسایگی متقارن به مرکز ۸ و شامل همه‌ی اعضای مجموعه‌ی A دارای چه شعاعی می‌باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۱۶۴- اگر $n\in\mathbb{N}$، حاصل $\left[\sqrt{n^۲+۴n}\right]-\left[\sqrt{۴n^۲+n}\right]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۶۵- معادله‌ی $\frac{x}{۳}=\max\left\{n\in\mathbb{Z}\mid n\le\frac{x}{۵}\right\}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶۶- اگر $(۲-\sqrt{۳})^۵+(۲+\sqrt{۳})^۵=۷۲۴$ باشد، جزءصحیح عدد $(۲+\sqrt{۳})^۵$ کدام است؟ آزمایشی سنجش

۱) ۷۲۲ ۲) ۷۲۳ ۳) ۷۲۴ ۴) ۷۲۵

۱۶۷- مجموعه‌ی $\left\{x\in\mathbb{R}\mid\frac{[|x|]}{x}=۰\right\}$ ...

۱) همسایگی متقارن به مرکز صفر و شعاع ۱

۲) همسایگی متقارن به مرکز صفر و شعاع $\frac{۱}{۲}$

۳) همسایگی محذوف متقارن به مرکز صفر و شعاع ۱

۴) همسایگی محذوف متقارن به مرکز صفر و شعاع $\frac{۱}{۲}$

۱۶۸- اگر همه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $[x]+۱+[۲[x]]<۴$ در رابطه‌ی $-k\le x\le k$ صدق کند، کم‌ترین مقدار k کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۶۹- مجموعه‌ی $A=\left\{\frac{۵}{x} \mid x \in \mathbb{R}, [x] \leq -۳\right\}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۱۷۰- مجموعه جواب $\left\{x \mid x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}, \frac{۱}{[x]} > \frac{۱}{۳}\right\}$ معرف چه نوع همسایگی می‌باشد؟

۱) همسایگی متقارن ۱/۵ به شعاع ۱/۵ ۲) همسایگی متقارن محذوف ۲ به شعاع ۱

۳) همسایگی متقارن ۱ به شعاع ۲ ۴) همسایگی متقارن محذوف ۲ به شعاع $\frac{۱}{۲}$

۱۷۱- اگر $A=\{x \notin \mathbb{Z} \mid ۲[x]+[-x]=۰$، همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع b باشد، مقدار عددی $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۷۲- نمودار تابع $y=[x^۳]$ در بازه‌ی $(-۲,۲)$ از چند پاره‌خط تشکیل شده است؟ آزمایشی سنجش

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۱۷۳- اگر $f(x)=[x]$، مجموعه‌ی مقادیر $f(x-f(x))$ کدام است؟

۱) $\{۰\}$ ۲) $\{۱\}$ ۳) $\{۰,۱\}$ ۴) $\{-۱,۰,۱\}$

۱۷۴- اگر $x^۲+x<۰$، حاصل $[x^۴]+[x^۳]+[x^۲]+[x]$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۱

۱۷۵- مقدار عددی $[\log ۷۴۷]-[\log ۰/۰۰۳]$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۶- حاصل $[\log_۲ ۶]+[\log_۶ ۲]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۷۷- برد تابع $y=\left(x-۲\left[\frac{x}{۲}\right]\right)^۲$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۸- نمودار $y=\cos([x])$ در بازه‌ی $[۰,\pi]$ از چند پاره‌خط تشکیل شده است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۹- دستگاه نامعادلات $\begin{cases} \left|\left[\frac{x}{۳}\right]+\left[\frac{-x}{۳}\right]\right|<۱ \\ \left|\frac{۱}{x}\right|>\frac{۱}{۱۰} \end{cases}$ چند جواب دارد؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۴

۱۸۰- مجموعه جواب معادله‌ی $\left[۳x+\frac{۱}{۲}\right]+\left[x-\frac{۵}{۳}\right]+\left[x+\frac{۵}{۳}\right]+[x]=۰$ به‌صورت بازه‌ی $[\alpha,\beta)$ است. $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۸۱- با کدام ضابطه‌ی $f(x)$، همواره تساوی $(-۱)^{[x]} f(x)=|f(x)|$ برقرار است؟ ریاضی داخل ۹۱

۱) $\sin \pi x$ ۲) $\cos \pi x$ ۳) $\sin ۲\pi x$ ۴) $\cos ۲\pi x$

۱۸۲- اگر $[x^۲]=۰$ باشد، حاصل $\sqrt{۱+x-۲\sqrt{x}}+\sqrt{x^۲-۲x\sqrt{x}+x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $۱-x$ ۳) $۱-\sqrt{x}$ ۴) $۱-[x]$

۱۸۳- برد تابع $y=|x|+[x]$ شامل کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۴/۲ ۲) ۳/۵ ۳) ۲/۹ ۴) ۶/۱

۱۸۴- معادله‌ی $[۳x^۲-۲x]=۴-|x|$ دارای چند ریشه است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۸۵- اگر $I=\{x \mid x \in \mathbb{R}, [x^۲]=[x]\}$ باشد و $I-\{a,b\}$ یک همسایگی متقارن محذوف باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۸۶- اگر به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، رابطه‌ی $\frac{3n-1}{n} < x + 2[-x]^2 \le 3$ برقرار باشد، آن‌گاه x چند مقدار غیرصحیح به خود اختصاص می‌دهد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۸۷- اگر جواب معادله‌ی $\left[\frac{x}{2} - [x]\right] = -2$ به‌صورت بازه‌ی $[a,b)$ باشد، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۴

۱۸۸- معادله‌ی $2x - [2x] = \frac{1}{2}$ چند جواب در بازه‌ی $[\sqrt{2}, \sqrt{10}]$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸۹- معادله‌ی $[5x] - [-5x] = 2$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۱۹۰- حاصل $\left[\tan\frac{\pi}{8}\right] + \left[\tan\frac{3\pi}{8}\right] + \left[\tan\frac{5\pi}{8}\right]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) صفر ۴) ۲

یک گام فراتر

۱۹۱- اگر $A = 0/9\overline{285714}$، باشد، عدد $1 - A$ کدام است؟ آزمایشی سنجش

۱) $\frac{1}{13}$ ۲) $\frac{5}{71}$ ۳) $\frac{1}{14}$ ۴) $\frac{7}{92}$

۱۹۲- نامعادله‌ی $x^2 + 2x + \sqrt{-x} \ge 3$ در بازه‌ی $(-10,0)$ چند جواب صحیح دارد؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۸

۱۹۳- اگر $\frac{-2}{x^4 + x} > 0$ برقرار باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\sqrt[7]{x} > \sqrt[5]{x}$ ۲) $x^2\sqrt[3]{x} > \sqrt[3]{x^2}$

۳) $x|x| > x\sqrt[3]{x^2}$ ۴) $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{x^4}$

۱۹۴- اگر $x + y < 2$ و $6y^2 < x^3 + y^3 + 4$ باشد، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری همواره صحیح است؟

۱) $y > 1$ ۲) $y < 1$ ۳) $x > 1$ ۴) $x < 1$

۱۹۵- اگر $a < b$ باشد، کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱) $a^2 - a < b^2 - b$ ۲) $a^4 - 4a < b^4 - 4b$

۳) $a^3 - a^2 + 3a < b^3 - b^2 + 3b$ ۴) $a^3 + a^2 - 3a < b^3 + b^2 - 3b$

۱۹۶- اگر $-a < b < 0$ باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $ab + a > 0$ ۲) $ab + b > 0$ ۳) $4a + 3b > 0$ ۴) $4b + 3a > 0$

۱۹۷- اگر x و y اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه $\min\{|x+y|, |x-y|\}$ کدام است؟

۱) $|x| + |y|$ ۲) $x + y$ ۳) $y - x$ ۴) $\big||x| - |y|\big|$

۱۹۸- مجموعه جواب نامعادله‌ی $\big||x| - 1\big| > \big|3|x| - 4\big| - \big|3 - 2|x|\big|$ چند بازه و به چه طول‌هایی می‌باشد؟

۱) دو بازه هر دو به طول $\frac{1}{2}$ ۲) دو بازه به طول‌های نامتناهی

۳) سه بازه به طول‌های نابرابر ۴) دو بازه که طول یکی $\frac{1}{2}$ و دیگری طول نامتناهی دارد.

۱۹۹- اگر $A = \left\{\frac{2\cos x + 3}{\cos x + 1} \,\middle|\, x \in \left(-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right)\right\}$ مفروض باشد و هر عضو از مجموعه‌ی A در نامساوی $|x| \le k$ صدق کند، حداقل عدد k کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۲۰۰- معادله‌ی $\cos x + |x-k| + |x-k-1| = 0$ $(k > 0)$ فقط یک جواب مثبت دارد. حداقل k کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2} - 1$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) $\pi - 1$

۲۰۱- مساحت محصور بین نمودار $y = |x-2| - |x-4|$، محورهای مختصات و خط $x = k$ برابر با $\frac{19}{4}$ است. مقدار k کدام است؟

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۲/۷۵ ۴) ۳

۲۰۲- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\sqrt{|x| - \frac{1}{2}} = \sin|\pi x|$ کدام است؟

۱) ریشه ندارد. ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

۲۰۳- تمام جواب‌های نامعادله‌ی $ax^2 + x + 1 > 0$ یک بازه‌ی متقارن به شعاع یک می‌باشد. a کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ۲) $\frac{1-\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{-1}{2}(1+\sqrt{2})$ ۴) $\frac{-1}{2}(\sqrt{2}-1)$

۲۰۴- جواب نامعادله‌ی $x^2 + 2x < |x+1|$ یک همسایگی متقارن به مرکز α و شعاع β می‌باشد. $\alpha + 2\beta$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) $\sqrt{5} - 1$

۲۰۵- بزرگ‌ترین عدد صحیحی که از $2x - [x]$ بیشتر نیست، کدام است؟

۱) $[x]$ ۲) $[-x]$ ۳) $\left[x + \frac{1}{2}\right]$ ۴) $[x] + \frac{1}{2}$

۲۰۶- اگر رابطه‌ی $[5x] = 5[x] + 2$ برقرار باشد، دقیق‌ترین محدوده‌ی $A = x - [x]$ کدام است؟

۱) $0 \le A < \frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{5} \le A < \frac{2}{5}$ ۳) $\frac{2}{5} \le A < \frac{3}{5}$ ۴) $\frac{3}{5} \le A < \frac{4}{5}$

یادداشت

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۲ مجموعه‌ی اعداد گویا، نسبت به جمع بسته است. برای اثبات اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ $(b,d\neq 0)$ دو عدد گویای دلخواه فرض شوند، آن‌گاه داریم:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\in\mathbb{Q}\quad (bd\neq 0)$$

مثال نقض برای گزینه‌ی (۱)، ۵ و ۳، برای گزینه‌ی (۳)، $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ و برای گزینه‌ی (۴)، ۴ و ۶ می‌باشد.

۲ ۲ طبق نکات بخش آموزش، مجموعه‌ی تک عضوی $\{0\}$، تنها مجموعه‌ای است که متناهی و غیرتهی است و نسبت به عمل جمع بسته می‌باشد. بنابراین $A=\{0\}$ و درنتیجه $A\cup\{1\}=\{0,1\}$ می‌شود. مجموعه‌ی $\{0,1\}$ فقط نسبت به ضرب بسته است، زیرا ضرب هر دو عضو دلخواه مجموعه، در خود مجموعه می‌باشد. مثال نقض برای جمع و تفریق به صورت روبه‌رو است: $0-1=-1\notin\{0,1\}\ ,\ 1+1=2\notin\{0,1\}$

۱ ۳ در تساوی‌های $x+(-x)=0$ ، $x+(-x+(-y))=(x+(-x))+(-y)$ و $0+(-y)=-y$ به‌ترتیب از خواص شرکت‌پذیری، وجود عضو قرینه و وجود عضو همانی در جمع استفاده شده است.

۴ ۳ ابتدا اعضای مجموعه را می‌نویسیم: $A=\left\{\pm 1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3},\cdots\right\}$

این مجموعه نسبت به ضرب بسته است. عضو همانی نسبت به عمل ضرب عدد ۱ می‌باشد که در مجموعه موجود است. عضو قرینه برای هر عضو دارد، اما عضو وارون برای هر عضو ندارد. برای مثال $\frac{1}{2}$ در مجموعه موجود است اما عدد ۲ در مجموعه نیست.

۴ ۵ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): به‌ازای $k=0$ ، $1\in A$ است، اما $1+1=2\notin A$، بنابراین نسبت به عمل جمع بسته نیست.

گزینه‌ی (۲): به‌ازای $k=1$ ، $(\sqrt{5}+1)\in A$ است اما $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)=(6+2\sqrt{5})\notin A$، بنابراین نسبت به عمل ضرب بسته نیست.

گزینه‌ی (۳): عضو همانی عمل جمع برابر صفر است که در مجموعه موجود نیست.

گزینه‌ی (۴): به‌ازای $k=0$ ، $1\in A$ است، پس عضو همانی در عمل ضرب وجود دارد. یعنی گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۱ ۶ می‌دانیم اگر برای هر عدد مثبت ε داشته باشیم $0\leq a<\varepsilon$، آن‌گاه $a=0$، بنابراین:

$$2x^2+4y^2-4xy-8x+16=0\Rightarrow x^2+4y^2-4xy+x^2-8x+16=0\Rightarrow (x-2y)^2+(x-4)^2=0\Rightarrow x=4,x=2y\Rightarrow y=2\Rightarrow xy=8$$

۲ ۷ طرفین رابطه را به عدد طبیعی n تقسیم می‌کنیم:

$$0\leq x^2-|2x+3|<\frac{5}{n}\Rightarrow x^2-|2x+3|=0\Rightarrow x^2=|2x+3|\Rightarrow\begin{cases}x^2=2x+3\Rightarrow x=3,-1\\ x^2=-2x-3\Rightarrow x^2+2x+3=0\xrightarrow{\Delta<0}\text{جواب ندارد.}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها}=3+(-1)=2$$

۴ ۸ اگر طرفین نامساوی‌ها را با عدد ۱ جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$k^2+2k+1\leq a+3<\frac{2}{n}\Rightarrow (k+1)^2\leq a+3<\frac{2}{n}$$

می‌دانیم $(k+1)^2\geq 0$، پس به‌ازای هر عدد طبیعی n رابطه‌ی $0\leq(k+1)^2<\frac{2}{n}$ برقرار است. بنابراین داریم:

$$(k+1)^2=0\Rightarrow k=-1$$

در نتیجه نامساوی به‌صورت $0\leq a+3<\frac{2}{n}$ درمی‌آید، پس $a=-3$ و $a+k=-4$ می‌شود.

۱ ۹ می‌دانیم اگر برای هر عدد مثبت ε داشته باشیم $0\leq a<\varepsilon$، آن‌گاه $a=0$ است. بنابراین:

$$b\leq a<b+h\Rightarrow 0\leq a-b<h\Rightarrow a-b=0\Rightarrow a=b$$

$$3\leq -2a+3\sqrt{ab}+\frac{b}{2}<3+h\Rightarrow 0\leq -2a+3\sqrt{ab}+\frac{b}{2}-3<h\Rightarrow -2a+3\sqrt{ab}+\frac{b}{2}-3=0$$

$$\xrightarrow{a=b}-2a+3\sqrt{a^2}+\frac{a}{2}-3=0\Rightarrow\frac{-3}{2}a+3|a|=3$$

$$\begin{cases}a>0:\frac{-3}{2}a+3a=3\Rightarrow\frac{3}{2}a=3\Rightarrow a=2\\ a<0:\frac{-3}{2}a-3a=3\Rightarrow\frac{-9}{2}a=3\Rightarrow a=\frac{-2}{3}\end{cases}\Rightarrow \text{مجموع مقادیر } a=2+\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

۲ ۱۰ می‌دانیم اگر برای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $a\leq b<a+\frac{c}{n}$، آن‌گاه $a=b$، بنابراین داریم:

$$2\leq x^2+5x-1<\frac{2n^3+4+1}{n^3+2}\Rightarrow 2\leq x^2+5x-1<2+\frac{1}{n^3+2}\Rightarrow x^2+5x-1=2$$

$$\Rightarrow x^2+5x-3=0\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها}=S=\frac{-b}{a}=-5$$

۴ ۱۱

$$۱+\frac{۲n+۳}{n+۱}=۱+\frac{۲n+۲+۱}{n+۱}=۳+\frac{۱}{n+۱}$$

$$\left[\frac{۴n^۲+۳}{n^۲+۱}\right]=\left[\frac{۴n^۲+۴-۱}{n^۲+۱}\right]=\left[۴-\frac{۱}{n^۲+۱}\right]$$

برای محاسبه‌ی $\left[۴-\frac{۱}{n^۲+۱}\right]$ داریم:

$$۰<\frac{۱}{n^۲+۱}<۱\Rightarrow -۱<\frac{-۱}{n^۲+۱}<۰\Rightarrow ۳<۴-\frac{۱}{n^۲+۱}<۴\Rightarrow\left[۴-\frac{۱}{n^۲+۱}\right]=۳$$

بنابراین نامساوی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$۳\le|x-۲|<۳+\frac{۱}{n+۱}\xrightarrow{\text{طبق نکات بخش آموزش}}|x-۲|=۳\Rightarrow x-۲=\pm۳\Rightarrow x=۵,x=-۱\Rightarrow x\text{ مجموع مقادیر }=۵-۱=۴$$

۱ ۱۲ اگر فرض کنیم $a=۱$ و $b=\sqrt[۳]{۲}$، آن‌گاه $ab^۲$ گنگ است. اما بقیه‌ی گزینه‌ها با توجه به نکات درسنامه درست‌اند.

۳ ۱۳ $a^۳$ یک عدد گویا است، بنابراین a می‌تواند گویا یا گنگ باشد، اما $(a^۳)^۲=a^۶$ و $(a^۳)^{۱۰}=a^{۳۰}$ حتماً گویا هستند. همچنین $b^۴$ گنگ است، پس b نیز قطعاً گنگ می‌باشد. با توجه به این مطالب، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $a+b$ ممکن است گویا یا گنگ باشد.

۲) $a-b^۴$ ممکن است گویا یا گنگ باشد.

۳) $\frac{a^{۳۰}+۲}{b}$ قطعاً گنگ است.

۴) $a^۶+b^۴$ قطعاً گنگ است.

۴ ۱۴ هیچ‌یک از اعداد داده شده، همواره گنگ نیست، زیرا:

$$\alpha=\sqrt۲\ ,\ \beta=\sqrt[۶]{۲}\Rightarrow\alpha\beta^۳=(\sqrt۲)(\sqrt۲)=۲\in\mathbb{Q}$$

$$\alpha=\sqrt۲+۱\ ,\ \beta=\sqrt۲\Rightarrow\alpha-\beta=۱\in\mathbb{Q}$$

$$\alpha=\beta=\sqrt۲\Rightarrow\log_\beta\alpha=\log_{\sqrt۲}\sqrt۲=۱\in\mathbb{Q}$$

$$\alpha=(\sqrt۲)^{\sqrt۲}\ ,\ \beta=\sqrt۲\Rightarrow\alpha^\beta=\left((\sqrt۲)^{\sqrt۲}\right)^{\sqrt۲}=(\sqrt۲)^۲=۲\in\mathbb{Q}$$

۳ ۱۵ عدد گنگ $\sqrt{۲a}-\sqrt{b}$ را در مزدوجش ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\sqrt{۲a}-\sqrt{b}=\frac{۲a-b}{\sqrt{۲a}+\sqrt{b}}\notin\mathbb{Q}\xrightarrow{(۲a-b)\in\mathbb{Q}}(\sqrt{۲a}+\sqrt{b})\notin\mathbb{Q}\Rightarrow۲(\sqrt{۲a}+\sqrt{b})\notin\mathbb{Q}\Rightarrow(\sqrt{۸a}+۲\sqrt{b})\notin\mathbb{Q}$$

مثال نقض برای گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴)، $a=۱$ و $b=۸$ می‌باشد.

۲ ۱۶ ابتدا طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\frac{a(\sqrt{b}-۳)}{\sqrt۳-۳}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow۳a\sqrt{b}-۹a=\sqrt۳-۳$$

اگر $\sqrt{b}=\sqrt۳$ باشد، آن‌گاه $b=۳$ است، در نتیجه:

$$۳a\sqrt۳-۹a=\sqrt۳-۳\Rightarrow۳a(\sqrt۳-۳)=\sqrt۳-۳\Rightarrow۳a=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۳}\Rightarrow a+b=\frac{۱۰}{۳}$$

۱ ۱۷

$$\frac{۱}{۱+\sqrt۳}\times\frac{\sqrt۳-۱}{\sqrt۳-۱}+\frac{۱}{\sqrt۳+\sqrt۵}\times\frac{\sqrt۵-\sqrt۳}{\sqrt۵-\sqrt۳}=\frac{\sqrt۳-۱}{۲}+\frac{\sqrt۵-\sqrt۳}{۲}=\frac{\sqrt۳-۱+\sqrt۵-\sqrt۳}{۲}=\frac{\sqrt۵-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt۵-۱}{۲}\times\frac{\sqrt۵+۱}{\sqrt۵+۱}=\frac{۲}{\sqrt۵+۱}=\frac{۱}{a+b\sqrt۵}\Rightarrow\frac{۲}{\sqrt۵+۱}=\frac{۲}{۲b\sqrt۵+۲a}\Rightarrow\begin{cases}۲a=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\\ ۲b=۱\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{b}=۱$$

۱ ۱۸ **روش اول:** عدد $\frac{۳\alpha+۲}{\alpha-۱}$ همواره گنگ است. برای اثبات ابتدا آن را تفکیک می‌کنیم:

$$\frac{۳\alpha+۲}{\alpha-۱}=\frac{۳\alpha-۳+۵}{\alpha-۱}=۳+\frac{۵}{\alpha-۱}$$

چون $\alpha-۱$ گنگ است، پس $\frac{۵}{\alpha-۱}$ و در نتیجه $۳+\frac{۵}{\alpha-۱}$ گنگ می‌باشد.

روش دوم:

نیم‌نگاه

اگر x یک عدد گنگ باشد و a، b، c و d گویا باشند $(c\neq۰)$، آن‌گاه عدد $\frac{ax+b}{cx+d}$ فقط با شرط $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ گویا است و در غیر این صورت گنگ محسوب می‌شود.

چون $\frac{۲}{-۱}\neq\frac{۳}{۱}$ است، پس $\frac{۳\alpha+۲}{\alpha-۱}$ همواره گنگ است.

حال برای سایر گزینه‌ها، مثال نقض می‌آوریم:

$$\alpha^۲-۳\alpha=\left(\alpha-\frac{۳}{۲}\right)^۲-\frac{۹}{۴}\xrightarrow{\alpha=\sqrt۲+\frac{۳}{۲}}\left(\sqrt۲+\frac{۳}{۲}-\frac{۳}{۲}\right)^۲-\frac{۹}{۴}=۲-\frac{۹}{۴}=-\frac{۱}{۴}\in\mathbb{Q}$$

یادتون باشه برای هر عبارت درجه‌ی دوم (با ضرایب گویا) به‌صورت $a\alpha^۲+b\alpha+c$ می‌تونیم یه عدد گنگ α پیدا کنیم که حاصل اون گویا بشه.

$$\log\sqrt{\alpha}\xrightarrow{\alpha=\sqrt{۱۰}}\log\sqrt[۴]{۱۰}=\frac{۱}{۴}\log۱۰=\frac{۱}{۴}\in\mathbb{Q}\quad;\quad\alpha^۳+\alpha^۶\xrightarrow{\alpha=\sqrt[۳]{۲}}۲+۴=۶\in\mathbb{Q}$$

۱۹ ۳ β عدد اعشاری پایان‌ناپذیر غیرمتناوب است، پس گنگ می‌باشد. حال اگر بخواهیم $\beta f(\alpha)$ گویا باشد، با درنظر گرفتن این‌که α گویا است، باید $f(\alpha)=0$ باشد. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $\alpha^2+9=0 \Rightarrow$ ریشه ندارد.

۲) $\alpha|\alpha|-3=0 \Rightarrow \alpha=\sqrt{3} \Rightarrow$ ریشه‌ی گویا ندارد.

۳) $\alpha^2+\alpha-2=0 \Rightarrow \alpha=1,-2$

۴) $\alpha^3-2=0 \Rightarrow \alpha=\sqrt[3]{2} \Rightarrow$ ریشه‌ی گویا ندارد.

بنابراین فقط گزینه‌ی (۳) ریشه‌ی گویا دارد.

۲۰ ۳ با توجه به‌صورت سؤال، a یک عدد گنگ و b یک عدد گویای متناوب است. حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) به‌ازای $a=\sqrt{8}$ و $b=\frac{2}{3}$ حاصل برابر ۲ می‌شود که گویا است.

۲) با توجه به تساوی $3ab+3b-a-1=3b(a+1)-(a+1)=(a+1)(3b-1)$ به ازای $b=\frac{1}{3}$ و $a=\sqrt{2}$ حاصل صفر می‌شود که گویا است.

۳) با توجه به تساوی $5ab-a=a(5b-1)$ فقط زمانی عبارت می‌تواند گویا شود که $b=\frac{1}{5}$ باشد. اما $\frac{1}{5}$ عدد گویای متناوب نیست، بلکه عدد اعشاری پایان‌پذیر است، پس این عدد همواره گنگ است.

۴) به‌ازای $a=\sqrt{2}$ و $b=\frac{1}{3}$ حاصل برابر صفر می‌شود که گویا است.

۲۱ ۲ با توجه به فرمول‌های کسر مولد عدد اعشاری متناوب داریم:

$$0/\overline{692}=\frac{692}{999} \quad , \quad 0/\overline{1}=\frac{1}{9} \quad , \quad 0/\overline{235}=\frac{235}{999} \Rightarrow \frac{\frac{692}{999}}{\frac{1}{9}+\frac{235}{999}}=\frac{\frac{692}{999}}{\frac{111+235}{999}}=\frac{692}{346}=2$$

۲۲ ۳ دو عدد را زیر هم نوشته و از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} 1/257575757\cdots \\ -0/423232323\cdots \\ \hline \end{array}$$

$$0/834343434\cdots \Rightarrow a-b=0/8\overline{34}=\frac{834-8}{990}=\frac{826}{990}=\frac{413}{495}=\frac{p}{q}$$

بنابراین $p=413$ است که مجموع ارقام آن $8=3+1+4$ می‌باشد.

۲۳ ۲

$$0/2\overline{ab}=\frac{\overline{2ab}-2}{990}=\frac{17}{66} \Rightarrow \frac{\overline{2ab}-2}{15}=17 \Rightarrow \overline{2ab}-2=255 \Rightarrow \overline{2ab}=257 \Rightarrow a=5 \quad , \quad b=7$$

$$\Rightarrow a/\overline{b}=5/\overline{7}=\frac{57-5}{9}=\frac{52}{9}$$

تذکر: مقادیر a و b را با تقسیم ۱۷ بر ۶۶ نیز می‌توانستید به دست بیاورید:

$$\begin{array}{r|l} 17 & 66 \\ \hline \vdots & 0/257 \end{array}$$

۲۴ ۲ بهتر است به جای تعیین کسر مولد $1/a\overline{36}$، ۱۸ را بر ۱۱ تقسیم کنیم:

$$\begin{array}{r|l} 18/0 & 11 \\ -11 & \hline 70 & 1/6 \\ -66 & \\ \hline 4 & \end{array} \Rightarrow a=6 \Rightarrow -1/\overline{a}=-1/\overline{6}=-\frac{16-1}{9}=-\frac{15}{9}=-\frac{5}{3}$$

۲۵ ۱ به کمک فرمول، کسر مولد $0/58\overline{3}$ را می‌نویسیم:

$$0/58\overline{3}=\frac{583-58}{900}=\frac{525}{900}=\frac{105}{180}=\frac{7}{12} \Rightarrow \frac{3a-2}{a(a+1)}=\frac{7}{12} \Rightarrow a=3$$

۲۶ ۲

$$0/\overline{5a}=\frac{\overline{5a}}{99}=\frac{b}{11} \Rightarrow \overline{5a}=9\times b$$

$\overline{5a}$ یک عدد دو رقمی با دهگان ۵ است، بنابراین برای این‌که تساوی برقرار باشد باید داشته باشیم:

$$54=9\times 6 \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=6 \end{cases} \Rightarrow a+b=10$$

۲۷ ۳ در کسرهای تحویل‌ناپذیری که مخرج از عوامل اول غیر ۲ و ۵ تشکیل شده، بسط اعشاری متناوب ساده است. حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $\frac{124}{35}=\frac{2^2\times 31}{5\times 7}$ متناوب مرکب

۲) $\frac{30}{84}=\frac{2\times 3\times 5}{2^2\times 3\times 7}=\frac{5}{2\times 7}$ متناوب مرکب

۳) $\frac{220}{105}=\frac{2^2\times 5\times 11}{3\times 5\times 7}=\frac{2^2\times 11}{3\times 7}$ متناوب ساده

۴) $\frac{60}{56}=\frac{2^2\times 3\times 5}{2^3\times 7}=\frac{3\times 5}{2\times 7}$ متناوب مرکب

۲۸ ۱

$$\circ/a\overline{3b}+\circ/b\overline{3a}=\frac{\overline{a3b}-a}{990}+\frac{\overline{b3a}-b}{990}=\frac{\overline{a3b}-a+\overline{b3a}-b}{990}=\frac{100a+30+b-a+100b+30+a-b}{990}$$

$$=\frac{100(a+b)+60}{990}=\frac{10(a+b)+6}{99}\Rightarrow\frac{10(a+b)+6}{99}=\frac{4}{11}\Rightarrow 10(a+b)+6=36\Rightarrow a+b=3$$

$$\circ/\overline{a}+\circ/\overline{b}=\frac{a}{9}+\frac{b}{9}=\frac{a+b}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

۲۹ ۳ **راه‌حل اول:**

$$\circ/5\overline{a}=\frac{b}{81}\Rightarrow\frac{\overline{5a}-5}{90}=\frac{b}{81}\Rightarrow\frac{50+a-5}{10}=\frac{b}{9}\Rightarrow 9(45+a)=10(b)$$

چون رقم یکان $10b$ صفر است، پس حتماً باید $a=5$ باشد. در نتیجه داریم:

$$9\times 50=10\,b\Rightarrow b=45\Rightarrow 45\times\circ/\overline{5}=45\left(\frac{5}{9}\right)=25$$

راه حل دوم: می‌دانیم $3^4=81$، پس بسط اعشاری $\frac{b}{81}$ متناوب ساده است. یعنی $\circ/5\overline{a}$ نباید متناوب مرکب باشد، بنابراین $a=5$.

$$\circ/5\overline{a}=\circ/5\overline{5}=\circ/\overline{5}=\frac{5}{9}=\frac{b}{81}\Rightarrow b=45\Rightarrow 45\times\circ/\overline{5}=45\left(\frac{5}{9}\right)=25$$

۳۰ ۲ ابتدا کسر را به‌صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

چون b عدد گویا است، پس $\frac{15}{a}=\frac{26}{12}$ بنابراین:

$$(2+\sqrt{3})^3=8+12\sqrt{3}+18+3\sqrt{3}=15\sqrt{3}+26\Rightarrow b=\frac{15\sqrt{3}+26}{a\sqrt{3}+12}$$

$$a=\frac{12\times 15}{26}=\frac{6\times 15}{13}$$

مخرج کسر فقط شامل عدد اول ۱۳ است، پس a عدد متناوب ساده می‌باشد.

۳۱ ۲ با توجه به مطالب درسنامه، در هر پنج‌ضلعی منتظم نسبت طول قطر به طول ضلع عدد گنگ $\frac{d}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است، بنابراین:

$$\frac{a}{d}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Rightarrow k=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

مجموع $k+k^2+k^3+\cdots$، مجموع نامتناهی جملات یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول k و قدرنسبت k می‌باشد، پس داریم:

$$S_\infty=\frac{a}{1-q}=\frac{k}{1-k}=\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{9-5}$$

$$=\frac{3\sqrt{5}+5-3-\sqrt{5}}{4}=\frac{2\sqrt{5}+2}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{5-1}{2(\sqrt{5}-1)}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{1}{k}$$

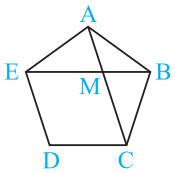
۳۲ ۴ می‌دانیم نسبت طول قطر d به طول ضلع a برابر $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ است، بنابراین:

$$\frac{d}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\frac{a}{d}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}d$$

چون قطر گویا است، پس طول ضلع حتماً گنگ است، بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح نیست. a باید مضرب گویایی از $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ باشد، پس گزینه‌های (۲) و (۳) نیز صحیح نیستند، زیرا $3-\sqrt{5}$ و $3-\sqrt{41}$ مضرب گویایی از $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ نیستند. اما به ازای $d=6$، طول ضلع $3-\sqrt{45}$ می‌شود:

$$\sqrt{45}-3=3\sqrt{5}-3=3(\sqrt{5}-1)=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)(6)$$

۳۳ ۱



$$M\hat{A}B=A\hat{B}M=36^\circ\Rightarrow AM=BM$$

$$M\hat{C}B=36^\circ\quad C\hat{B}M=72^\circ\Rightarrow B\hat{M}C=72^\circ\Rightarrow BC=MC=2\ (\text{گویا})$$

در پنج‌ضلعی منتظم، نسبت قطر به ضلع برابر است با $\frac{d}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$، پس اگر طول ضلع گویا باشد، قطر آن گنگ است:

$$BM=AM=AC-MC=d-a\ (\text{گنگ})$$

۳۴ ۳ اگر طول پنج‌ضلعی منتظم a و قطر آن d باشد، آن‌گاه:

$$AF=FD=a\qquad\frac{d}{a}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Rightarrow d=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$$

$$FC=d-a=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a-a=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1\right)a=\left(\frac{\sqrt{5}+1-2}{2}\right)a\Rightarrow FC=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a$$

$$\Rightarrow\sqrt{5}-1=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a\Rightarrow a=2\Rightarrow\text{محیط چهارضلعی AFDE}=4a=4(2)=8$$

۳۵ **۳** چون b منفی است، اگر دو سمت نامساوی را بر b تقسیم کنیم، جهت عوض می‌شود:

$$0 > a > b \xrightarrow{\div b} \frac{a}{b} < 1$$

مثال نقض برای سایر گزینه‌ها $a = -1$ و $b = -2$ می‌باشد.

۳۶ **۴** زیرا اگر $b < 0$، قطعاً $\frac{1}{b} < 0$ می‌شود، پس به ازای $a > 0$، داریم $\frac{1}{b} < a$. مثال نقض برای گزینه‌ی (۱) و (۲)، $a = 2$ و $b = -1$ و برای گزینه‌ی (۳)، $a = 1$ و $b = -2$ می‌باشد.

۳۷ **۴** چون $\sqrt{b} > 0$، بنابراین $\sqrt[7]{a} > 0$ و در نتیجه $a > 0$ است. پس می‌توانیم دو سمت را به توان ۱۴ برسانیم:

$$\sqrt[7]{a} > \sqrt{b} \Rightarrow (\sqrt[7]{a})^{14} > (\sqrt{b})^{14} \Rightarrow a^2 > b^7 > 0 \Rightarrow \frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^7}$$

هم‌چنین از ضرب عدد مثبت a^3 در دو سمت نامعادله‌ی $a^2 > b^7$ داریم:

$$a^2 > b^7 \xrightarrow{\times a^3} a^5 > a^3 b^7$$

اما نامعادله‌ی گزینه‌ی (۴) نادرست است. برای مثال، $a = b = \frac{1}{2}$ را در نظر بگیرید.

۳۸ **۳** هر یک از نامساوی‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$a < b \xrightarrow{b^2 \geq 0} ab^2 \leq b.b^2 \Rightarrow ab^2 \leq b^3$$

پس رابطه‌ی $ab^2 < b^3$ به علت نداشتن تساوی همواره برقرار نیست. برای مثال، $a = -1$ و $b = 0$ را در نظر بگیرید.

رابطه‌ی $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ همواره برقرار نیست، زیرا در صورتی می‌توان نامساوی را معکوس کرد و علامت را تغییر داد که a و b هم علامت باشند.

از $a < b$ می‌توان نتیجه گرفت $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$، از طرفی چون (b^2+1) همواره مثبت است، دو سمت را بر (b^2+1) تقسیم می‌کنیم. بنابراین نامساوی $\frac{\sqrt[3]{a}}{b^2+1} < \frac{\sqrt[3]{b}}{b^2+1}$ همواره برقرار است.

$a^5 < b^5$ همواره صحیح است، زیرا دو سمت نامساوی را می‌توان به توان فرد رساند. پس دو عبارت، همواره صحیح می‌باشند.

۳۹ **۴**

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) - 4 = 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 - 4 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}$$

می‌دانیم $(a-b)^2 \geq 0$، از طرفی چون a و b، هم‌علامت هستند، پس $ab > 0$، در نتیجه همواره $\frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$ است.

البته این طوری هم می‌تونستی بگی که چون $\frac{a}{b}$ مثبته، پس طبق نکته‌ی درسنامه، $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ و در نتیجه $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq 0$.

۴۰ **۲** طبق تمرین کتاب درسی رابطه‌ی $(1+x)^n \geq 1+nx$ که به نامساوی برنولی معروف است در شرایط $n \in \mathbb{N}$ و $x \geq -1$ همواره برقرار است.

یادتون باشه که همه‌ی تمرینای کتاب درسیتون رو خوب مطالعه کنید. البته ما سعی کردیم همه‌ی سؤال‌های مهم کتاب رو در قالب تست مطرح کنیم.

۴۱ **۳**

$$-x^2 \geq x \Rightarrow x + x^2 \leq 0 \Rightarrow x(1+x) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 \leq x \leq 0 \qquad (1)$$

$$y^2 + 3y \leq -2 \Rightarrow y^2 + 3y + 2 \leq 0 \Rightarrow (y+1)(y+2) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2 \leq y \leq -1 \qquad (2)$$

از جمع دو نامساوی (۱) و (۲) خواهیم داشت: $-3 \leq x + y \leq -1$.

۴۲ **۳** **راه حل اول:** برای مقایسه‌ی اعداد کافی است فرجه‌ها را یکسان کنیم:

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[15]{3^5} = \sqrt[15]{243} \; ; \; \sqrt[5]{5} = \sqrt[15]{5^3} = \sqrt[15]{125} \Rightarrow \sqrt[3]{3} > \sqrt[5]{5}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt[14]{2^7} = \sqrt[14]{128} \; ; \; \sqrt[7]{7} = \sqrt[14]{7^2} = \sqrt[14]{49} \Rightarrow \sqrt{2} > \sqrt[7]{7}$$

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9} \; ; \; \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8} \Rightarrow \sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$$

پس هر سه نامساوی صحیح می‌باشد.

راه حل دوم: با توجه به نکته‌ی درسنامه اگر $n \geq 3$ باشد، آن‌گاه $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$.

$$\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \sqrt[6]{6} > \sqrt[7]{7} \geq \cdots \quad (\sqrt[4]{4} = \sqrt{2})$$

۴۳ **۴** بازه‌ی $\left[\frac{-1}{4}, 3\right]$ را به دو بازه‌ی زیر تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{-1}{4} \leq f(x) < 0 \Rightarrow -\infty < \frac{1}{f(x)} \leq -4 \Rightarrow -\infty < \frac{3}{f(x)} \leq -12$$

$$0 < f(x) \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{f(x)} < +\infty \Rightarrow 1 \leq \frac{3}{f(x)} < +\infty$$

بنابراین برد تابع $y = \frac{3}{f(x)}$ به‌صورت $(-\infty, -12] \cup [1, +\infty)$ می‌باشد که شامل اعداد صحیح $-0.1, -11, \ldots$ نمی‌باشد، پس گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۴ ۴۴ زیر رادیکال باید مثبت یا صفر باشد، بنابراین $x \geq ۲$ است.

برای به توان ۲ رساندن، شرط $۳ - \sqrt{x-۲} \geq ۰$ را باید در نظر بگیریم:

$$۳ - \sqrt{x-۲} \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x-۲} \leq ۳ \Rightarrow x-۲ \leq ۹ \Rightarrow x \leq ۱۱$$

$$\sqrt{x+۱} < ۳ - \sqrt{x-۲}$$

$$(\sqrt{x+۱})^۲ < (۳ - \sqrt{x-۲})^۲ \Rightarrow x+۱ < ۹ + x - ۲ - ۶\sqrt{x-۲} \Rightarrow ۶\sqrt{x-۲} < ۶ \Rightarrow \sqrt{x-۲} < ۱ \Rightarrow x < ۳$$

با در نظر گرفتن شرایط $x < ۳$، $x \geq ۲$ و $x \leq ۱۱$، مجموعه جواب به صورت بازه‌ی $[۲,۳)$ درمی‌آید که طول آن یک واحد است.

۲ ۴۵ برای این‌که نمودار تابع $f(x)$ بالای نمودار تابع $g(x)$ قرار بگیرد، باید $f(x) > g(x)$ باشد، بنابراین:

$$\frac{۲x-۵}{۲x^۲+۳x+۲} > \frac{۱}{x} \Rightarrow \frac{۲x-۵}{۲x^۲+۳x+۲} - \frac{۱}{x} > ۰ \Rightarrow \frac{۲x^۲-۵x-۲x^۲-۳x-۲}{x(۲x^۲+۳x+۲)} > ۰ \Rightarrow \frac{-۸x-۲}{x(۲x^۲+۳x+۲)} > ۰$$

عبارت $۲x^۲+۳x+۲$ همواره مثبت است ($\Delta < ۰$ و $a > ۰$)، پس $P = \frac{-۸x-۲}{x}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x		$-\frac{۱}{۴}$		۰	
P	−	۰	+	‖	−

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۴} < x < ۰$$

۱ ۴۶ دامنه‌ی نامعادله، بازه‌ی $(۲,+\infty)$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{x^۲+x-۲}{(۱-x)\sqrt{x-۲}} > ۱ \Rightarrow \frac{(x-۱)(x+۲)}{(۱-x)\sqrt{x-۲}} > ۱ \Rightarrow \frac{-(x+۲)}{\sqrt{x-۲}} > ۱ \xrightarrow{\sqrt{x-۲}>۰} -(x+۲) > \sqrt{x-۲}$$

به‌ازای $x > ۲$ سمت چپ نامعادله همواره منفی و سمت راست آن مثبت است، پس این نامعادله هیچ‌گاه برقرار نیست.

۲ ۴۷ برای حل نامعادله‌ی $f(x) < ۰$، ابتدا ریشه‌های معادله‌ی $f(x) = ۰$ را به‌دست می‌آوریم. چون مجموع ضرایب معادله برابر صفر است، پس یکی از ریشه‌ها برابر یک می‌باشد. با تقسیم عبارت بر $(x-۱)$ می‌توان بقیه‌ی ریشه‌ها را در صورت وجود به دست آورد:

$$\begin{array}{r|l} x^۳-۴x^۲-x+۴ & x-۱ \\ \hline -x^۳+x^۲ & x^۲-۳x-۴ \\ \hline -۳x^۲-x+۴ & \\ ۳x^۲-۳x & \\ \hline -۴x+۴ & \\ ۴x-۴ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^۳-۴x^۲-x+۴ = (x-۱)(x^۲-۳x-۴) = (x-۱)(x+۱)(x-۴) < ۰$$

x		-۱		۱		۴	
f(x)	−	۰	+	۰	−	۰	+

با توجه به شرط $x > -۱$، تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(۱,۴)$ زیر محور xها است، پس $b-a = ۳$ می‌باشد.

۳ ۴۸

نیم‌نگاه

با توجه به آن‌که تابع $y = a^x$ در حالت $a > ۱$ اکیداً صعودی و در حالت $۰ < a < ۱$ اکیداً نزولی است، داریم:

$$x > y \xrightarrow{۰<a<۱} a^x < a^y \quad , \quad x > y \xrightarrow{a>۱} a^x > a^y$$

$$۰ < \sqrt{۵} - \sqrt{۳} < ۱ \Rightarrow x^۲ < \sqrt{x^۲-۴x+۴} \Rightarrow x^۲ < \sqrt{(x-۲)^۲} \Rightarrow x^۲ < |x-۲|$$

$$x \geq ۲ \Rightarrow x^۲ < x-۲ \Rightarrow x^۲-x+۲ < ۰ \xrightarrow{\Delta<۰, a>۰}$$ هیچ‌گاه برقرار نیست.

$$x < ۲ \Rightarrow x^۲ < -x+۲ \Rightarrow x^۲+x-۲ < ۰ \Rightarrow (x-۱)(x+۲) < ۰ \Rightarrow -۲ < x < ۱$$

بنابراین مجموعه جواب به‌صورت $-۲ < x < ۱$ است، پس $a+b = -۱$.

۱ ۴۹ صورت و مخرج طرفین نامساوی‌ها را در مزدوج عدد ضرب می‌کنیم، برای گزینه‌ی (۱) داریم:

$$\sqrt{۲۰} - \sqrt{۱۷} = \frac{۲۰-۱۷}{\sqrt{۲۰}+\sqrt{۱۷}} = \frac{۳}{\sqrt{۲۰}+\sqrt{۱۷}}$$

$$\sqrt{۱۳} - \sqrt{۱۰} = \frac{۱۳-۱۰}{\sqrt{۱۳}+\sqrt{۱۰}} = \frac{۳}{\sqrt{۱۳}+\sqrt{۱۰}}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{۲۰}+\sqrt{۱۷} > \sqrt{۱۳}+\sqrt{۱۰}} \frac{۳}{\sqrt{۲۰}+\sqrt{۱۷}} < \frac{۳}{\sqrt{۱۳}+\sqrt{۱۰}} \Rightarrow \sqrt{۲۰} - \sqrt{۱۷} < \sqrt{۱۳} - \sqrt{۱۰}$$

پس گزینه‌ی (۱) صحیح است. برای سایر گزینه‌ها نیز به همین‌صورت اقدام می‌کنیم:

۲) $\sqrt{۲۰} - \sqrt{۱۳} = \frac{۷}{\sqrt{۲۰}+\sqrt{۱۳}}$; $\sqrt{۱۷} - \sqrt{۱۰} = \frac{۷}{\sqrt{۱۷}+\sqrt{۱۰}}$; $\frac{۷}{\sqrt{۲۰}+\sqrt{۱۳}} < \frac{۷}{\sqrt{۱۷}+\sqrt{۱۰}} \Rightarrow \sqrt{۲۰} - \sqrt{۱۳} < \sqrt{۱۷} - \sqrt{۱۰}$

۳) $\sqrt{۱۴} - \sqrt{۱۱} = \frac{۳}{\sqrt{۱۴}+\sqrt{۱۱}}$; $\sqrt{۳} = \frac{۳}{\sqrt{۳}}$; $\frac{۳}{\sqrt{۱۴}+\sqrt{۱۱}} < \frac{۳}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \sqrt{۱۴} - \sqrt{۱۱} < \sqrt{۳}$

۴) $\sqrt{۵} - \sqrt{۲} = \frac{۳}{\sqrt{۵}+\sqrt{۲}}$; $\sqrt{۳} = \frac{۳}{\sqrt{۳}}$; $\frac{۳}{\sqrt{۵}+\sqrt{۲}} < \frac{۳}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \sqrt{۵} - \sqrt{۲} < \sqrt{۳}$

۵۰ ۱ با توجه به مطالب درسنامه اگر a منفی باشد، آن‌گاه $a+\frac{۱}{a}\le -۲$ است. (زمانی $a+\frac{۱}{a}=-۲$ می‌شود که $a=-۱$ باشد.) چون $x<۳$، پس $x-۳<۰$ و در نتیجه داریم:

$$\frac{۱}{x-۳}+x=x-۳+\frac{۱}{x-۳}+۳\le -۲+۳\Rightarrow \frac{۱}{x-۳}+x\le ۱$$

بنابراین بیشترین مقدار عبارت برابر ۱ است. (این مقدار به‌ازای $x=۲\Rightarrow x-۳=-۱$ حاصل می‌شود.)

۵۱ ۳ **راه‌حل اول:** به کمک اتحاد مثلثاتی $\frac{۱}{\cos^۲ x}=۱+\tan^۲ x$ عبارت را به‌صورت مربع کامل درمی‌آوریم:

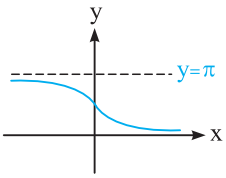
$$۱+\tan^۲ x+\cot^۲ x=(\tan x-\cot x)^۲+۳$$

حداقل مقدار $(\tan x-\cot x)^۲$ برابر صفر است، پس کم‌ترین مقدار عبارت داده شده برابر ۳ می‌شود.

راه‌حل دوم: چون $\tan^۲ x,\cot^۲ x>۰$، پس می‌توان از نامساوی $a+b\ge ۲\sqrt{ab}$ استفاده کرد:

$$\frac{۱}{\cos^۲ x}+\cot^۲ x=۱+\tan^۲ x+\cot^۲ x\ge ۱+۲\sqrt{(\tan^۲ x)(\cot^۲ x)}=۳\Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲ x}+\cot^۲ x\ge ۳$$

۵۲ ۲ **بررسی گزینه‌ها:**



۱) چون $f(x)=\cot x$ غیر یکنوا است، این نتیجه‌گیری نادرست است. برای مثال نقض داریم: $a=\frac{\pi}{۲}$ و $b=\frac{۵\pi}{۴}$.

۲) چون $f(x)=\cot^{-۱} x$ نزولی است، پس $\cot^{-۱}a>\cot^{-۱}b$ همواره صحیح است.

۳) با توجه به این که $|۲a-b|\ge ۰$ پس می‌توان نتیجه گرفت $a|۲a-b|\le b|۲a-b|$ اما چون علامت تساوی ندارد، پس گزینه‌ی (۳) نادرست است. برای مثال نقض داریم: $a=۱$ و $b=۲$.

۴) چون علامت a و b را نمی‌دانیم، پس $a^{-۳}>b^{-۳}$ همواره صحیح نیست. برای مثال نقض داریم: $a=-۱$ و $b=۱$.

۵۳ ۲ **راه‌حل اول:**

$$b>a\Rightarrow b^۳>a^۳\Rightarrow \begin{cases} b>a \\ b^۳>a^۳ \end{cases}\xrightarrow{\text{جمع طرفین}} b^۳+b>a^۳+a\xrightarrow{+۱} b^۳+b+۱>a^۳+a+۱$$

راه‌حل دوم: می‌دانیم اگر تابع f صعودی اکید باشد و $b>a$، آن‌گاه $f(b)>f(a)$. تابع مربوط به گزینه‌ی (۲) صعودی اکید است، زیرا:

$$f(x)=x^۳+x+۱\Rightarrow f'(x)=۳x^۲+۱>۰$$

پس نتیجه می‌گیریم $b^۳+b+۱>a^۳+a+۱$. توابع مربوط به بقیه‌ی گزینه‌ها، غیریکنوا هستند.

۵۴ ۱ گزینه‌های (۱) و (۳) با گزینه‌های (۲) و (۴) فقط در جهت نامساوی اختلاف دارند، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینه‌ی (۱): } a^۳+a^۷>a^۴+a^۶\Leftrightarrow a^۷-a^۶>a^۴-a^۳\Leftrightarrow a^۶(a-۱)>a^۳(a-۱)\xrightarrow{a>۰,a-۱<۰} a^۳<۱$$

چون $a<۱$، پس $a^۳<۱$ همواره درست است. پس این نامساوی همواره صحیح می‌باشد و در نتیجه گزینه‌ی (۳) همواره غلط می‌شود.

$$\text{گزینه‌ی (۲): } a^۳+a^۸>a^۴+a^۶\Leftrightarrow a^۸-a^۶>a^۴-a^۳\Leftrightarrow a^۶(a^۲-۱)>a^۳(a-۱)\xrightarrow{a>۰,a-۱<۰} a^۳(a+۱)<۱\Leftrightarrow a^۴+a^۳<۱$$

نامعادله‌ی گزینه‌ی (۲) به‌صورت $a^۴+a^۳<۱$ و گزینه‌ی (۴) به‌صورت $a^۴+a^۳>۱$ می‌شوند که با در نظر گرفتن $a=۰/۹$ برای گزینه‌ی (۲) و $a=۰/۱$ برای گزینه‌ی (۴) متوجه می‌شویم هیچ یک صحیح نیستند.

۵۵ ۲ **بررسی گزینه‌ها:**

۱) $a<b,c<d\Rightarrow a+c<b+d$ برقرار است، ولی عکس آن صحیح نیست. برای مثال اگر $a=۲$، $b=۱$، $c=۳$ و $d=۷$ را در نظر بگیریم، گزاره‌ی $c<d$ و $a+c<b+d\Rightarrow a<b$ نادرست می‌شود.

۲) این گزاره همواره درست است، زیرا:

$$\sqrt{-a}<\sqrt{-b}\xrightarrow{a,b<۰} -a<-b\Rightarrow a>b\Rightarrow ۰>a>b$$

$$۰>a>b\Rightarrow ۰<-a<-b\Rightarrow \sqrt{-a}<\sqrt{-b}$$

۳) $c<d\Rightarrow ac<bd$ و $a<b$ و عکس آن هر دو غلط هستند.

۴) $(a,b\ne ۰)a<b\Rightarrow \frac{۱}{a}>\frac{۱}{b}$ و عکس آن هر دو غلط هستند (این قضیه زمانی درست است که a و b هم‌علامت باشند).

۵۶ ۱ a مثبت و b منفی است، بنابراین $|b|=-b$ و $|a|=a$. برای تعیین علامت $a+b$ باید بگوییم که چون مقدار a مثبت است و از نظر قدرمطلقی بزرگ‌تر است، پس $a+b$ حتماً مثبت می‌باشد. بنابراین:

$$|a+b|+|a|+|b|=a+b+a-b=۲a$$

برای این‌که ساده‌تر حل کنی می‌تونی $a=۲$ و $b=-۱$ رو انتخاب کنی تا به گزینه‌ی (۱) برسی.

۵۷ ۲ نامعادله‌ی قدرمطلقی را حل می‌کنیم:

$$|x-۱|<۰/۱\Rightarrow -۰/۱<x-۱<۰/۱\Rightarrow ۰/۹<x<۱/۱\Rightarrow ۱/۸<۲x<۲/۲\Rightarrow -۱/۲<۲x-۳<-۰/۸$$

$$\Rightarrow A=-۱/۲\quad ,\quad B=-۰/۸\Rightarrow A+B=-۲$$

۵۸ ۱

$$|۲x-۳|<x \Rightarrow -x<۲x-۳<x \Rightarrow \begin{cases} -x<۲x-۳ \Rightarrow -۳x<-۳ \Rightarrow x>۱ \\ ۲x-۳<x \Rightarrow x<۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} ۱<x<۳$$

حال با استفاده از رابطه‌ی $a<x<b \Rightarrow \left|x-\frac{a+b}{۲}\right|<\frac{b-a}{۲}$ داریم:

$$۱<x<۳ \Rightarrow |x-۲|<۱$$

۵۹ ۳ چون $b^۳$ منفی است، پس b نیز منفی می‌باشد، بنابراین داریم:

$$|a|<|b| \Rightarrow |a|<-b \Rightarrow -(-b)<a<-b \Rightarrow b<a<-b$$

پس همواره $a>b$ است.

۶۰ ۴ مجموعه جواب $x^۲<-x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۲<-x \Rightarrow x^۲+x<۰ \Rightarrow x(x+۱)<۰ \Rightarrow -۱<x<۰$$

در بازه‌ی $(-۱,۰)$، عبارت $۲x-۱$ همواره منفی و عبارت $x-۲$ همواره مثبت است. بنابراین:

$$|۲x-۱|+|۲-x|=-۲x+۱+۲-x=-۳x+۳$$

۶۱ ۳ می‌دانیم اگر $a<b<۰$ باشد، آن‌گاه $a^۲>b^۲>۰$ است. بنابراین داریم:

$$\sqrt{a^۴+b^۴+۲a^۲b^۲}+\sqrt{a^۴+b^۴-۲a^۲b^۲}=\sqrt{(a^۲+b^۲)^۲}+\sqrt{(a^۲-b^۲)^۲}=\underbrace{|a^۲+b^۲|}_{\text{مثبت}}+\underbrace{|a^۲-b^۲|}_{\text{مثبت}}=a^۲+b^۲+a^۲-b^۲=۲a^۲$$

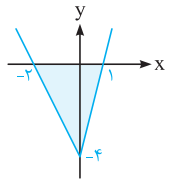
۶۲ ۲ می‌دانیم $|a|=|b| \Rightarrow a=\pm b$، بنابراین داریم:

$$|x^۲-۲x-۱|=|x^۲-۲x+۳| \Rightarrow x^۲-۲x-۱=\pm(x^۲-۲x+۳)$$

$$\begin{cases} x^۲-۲x-۱=x^۲-۲x+۳ \Rightarrow -۱=۳ \Rightarrow \text{جواب ندارد} \\ x^۲-۲x-۱=-x^۲+۲x-۳ \Rightarrow ۲x^۲-۴x+۲=۰ \Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰ \Rightarrow (x-۱)^۲=۰ \Rightarrow x=۱ \end{cases}$$

$x=۱$، ریشه‌ی مضاعف معادله است.

۶۳ ۳ تابع را به صورت دوضابطه‌ای نوشته و آن را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} x \geq ۰ : \Rightarrow y=۳x+x-۴ \Rightarrow y=۴x-۴ \\ x<۰ : \Rightarrow y=-۳x+x-۴ \Rightarrow y=-۲x-۴ \end{cases}$$

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{۳\times ۴}{۲}=۶$$

۶۴ ۳ مجموعه جواب دو نامعادله را به‌دست آورده و اشتراک می‌گیریم:

$$|x^۲-۱|<۸ \Rightarrow -۸<x^۲-۱<۸ \Rightarrow -۷<x^۲<۹ \Rightarrow ۰ \leq x^۲<۹ \Rightarrow -۳<x<۳$$

$$|x+۱|>۲x-۱ \Rightarrow x+۱>۲x-۱ \text{ یا } x+۱<-۲x+۱ \Rightarrow x<۲ \text{ یا } x<۰ \xrightarrow{\text{اجتماع}} x<۲$$

از اشتراک دو نامساوی $-۳<x<۳$ و $x<۲$ مجموعه جواب به‌صورت $-۳<x<۲$ درمی‌آید، پس $\beta-\alpha=۵$.

۶۵ ۳ با توجه به این‌که $\pi>۳/۱۴$ داریم:

$$(x+۲)^۲-\pi=\pm ۳/۱۴ \Rightarrow \begin{cases} (x+۲)^۲=\pi+۳/۱۴ \Rightarrow x+۲=\pm\sqrt{\pi+۳/۱۴} \Rightarrow x_۱,x_۲=-۲\pm\sqrt{\pi+۳/۱۴} \\ (x+۲)^۲=\pi-۳/۱۴ \Rightarrow x+۲=\pm\sqrt{\pi-۳/۱۴} \Rightarrow x_۳,x_۴=-۲\pm\sqrt{\pi-۳/۱۴} \end{cases} \Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=-۸$$

۶۶ ۲ ابتدا اعضای مجموعه‌ی A را مشخص می‌کنیم:

$$|۲x+۱|<۵ \Rightarrow -۵<۲x+۱<۵ \Rightarrow -۶<۲x<۴ \Rightarrow -۳<x<۲ \Rightarrow -\frac{۳}{۲}<\frac{x}{۲}<۱ \Rightarrow A=\left\{x \mid -\frac{۳}{۲}<x<۱\right\}$$

اگر $a<x<b$، در صورتی که بخواهیم عدد k را طوری پیدا کنیم که $|x|<k$، آن‌گاه $\min k=\max\{|a|,|b|\}$، بنابراین:

$$\min k=\max\left\{\left|-\frac{۳}{۲}\right|,|۱|\right\}=\frac{۳}{۲}$$

۶۷ ۴

$$|x| \leq \frac{x}{۲}+۱ \xrightarrow{\times ۲} |۲x| \leq x+۲ \Rightarrow -x-۲ \leq ۲x \leq x+۲ \Rightarrow \begin{cases} -x-۲ \leq ۲x \Rightarrow ۳x \geq -۲ \Rightarrow x \geq \frac{-۲}{۳} \\ ۲x \leq x+۲ \Rightarrow x \leq ۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cap} -\frac{۲}{۳} \leq x \leq ۲ \Rightarrow ۰ \leq x^۲ \leq ۴ \Rightarrow M-m=۴-۰=۴$$

فیلی‌ها هستن که از $-\frac{۲}{۳} \leq x \leq ۲$ نتیجه می‌گیرن $\frac{۴}{۹} \leq x^۲ \leq ۴$. شما که این‌طور حل نکردید؟

۶۸ ۲ با توجه به جدول تعیین علامت، معادله را در سه حالت مختلف حل می‌کنیم:

x		۱		۲	
$x-۱$	$-$	۰	$+$		$+$
$x-۲$	$-$		$-$	۰	$+$

$$x<۱ : ۳(۲-x)+(۱-x)=۴ \Rightarrow -۴x=-۳ \Rightarrow x=\frac{۳}{۴}$$

$$۱ \leq x \leq ۲ : ۳(۲-x)+x-۱=۴ \Rightarrow -۲x=-۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{۱\leq x\leq ۲} \text{جواب ندارد}$$

$$x>۲ : ۳(x-۲)+(x-۱)=۴ \Rightarrow ۴x=۱۱ \Rightarrow x=\frac{۱۱}{۴}$$

بنابراین مجموع ریشه‌های معادله $\frac{۷}{۲}=\frac{۳}{۴}+\frac{۱۱}{۴}$ می‌شود.

کم‌کم باید سعی کنی بدون جدول تعیین علامت هم، این تست‌ها رو حل کنی.

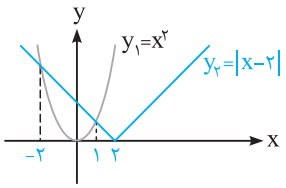
۶۹ **۲** برای پیدا کردن بازه‌ای که تابع $y=۴-|x|$ بالاتر از تابع $y=\frac{۵-x}{۲}$ قرار گیرد، کافی است نامعادله‌ی $۴-|x|>\frac{۵-x}{۲}$ را حل کنیم:

$$x\geq ۰: ۴-x>\frac{۵-x}{۲}\Rightarrow ۸-۲x>۵-x\Rightarrow x<۳\xrightarrow{x\geq ۰} ۰\leq x<۳$$

$$x<۰: ۴+x>\frac{۵-x}{۲}\Rightarrow ۸+۲x>۵-x\Rightarrow ۳x>-۳\Rightarrow x>-۱\xrightarrow{x<۰} -۱<x<۰$$

پس مجموعه جواب به صورت بازه‌ی $(-۱,۳)$ درمی‌آید، در نتیجه $b-a=۴$.

۷۰ **۱** نامعادله‌ی $x^۲<|x-۲|$ را در دو حالت $x\geq ۲$ و $x<۲$ حل می‌کنیم:



$$x\geq ۲: x^۲<x-۲\Rightarrow x^۲-x+۲<۰\xrightarrow{a>۰,\Delta<۰}$$ جواب ندارد.

$$x<۲: x^۲<-x+۲\Rightarrow x^۲+x-۲<۰\Rightarrow (x-۱)(x+۲)<۰\Rightarrow -۲<x<۱$$

پس مجموعه جواب نامعادله، بازه‌ی $(-۲,۱)$ می‌باشد. البته با رسم نمودار نیز می‌توانستید گزینه‌ی (۱) را حدس بزنید.

۷۱ **۳** دامنه‌ی تابع، مجموعه جواب نامعادله‌ی $\sqrt{\frac{x}{۶}+۴-|x|}\geq ۰$ می‌باشد، بنابراین در دو حالت $x\geq ۰$ و $x<۰$ این نامعادله را حل می‌کنیم:

$$x\geq ۰: \frac{x}{۶}+۴-x\geq ۰\Rightarrow \frac{-۵}{۶}x\geq -۴\Rightarrow x\leq \frac{۲۴}{۵}\xrightarrow{x\geq ۰} ۰\leq x\leq \frac{۲۴}{۵}$$

$$x<۰: \frac{x}{۶}+۴+x\geq ۰\Rightarrow \frac{۷}{۶}x\geq -۴\Rightarrow x\geq \frac{-۲۴}{۷}\xrightarrow{x<۰} \frac{-۲۴}{۷}\leq x<۰$$

پس مجموعه جواب به‌صورت بازه‌ی $\left[\frac{-۲۴}{۷},\frac{۲۴}{۵}\right]$ درمی‌آید که اعداد صحیح این بازه، اعضای مجموعه $\{-۳,-۲,\cdots,۳,۴\}$ هستند که شامل ۸ عدد صحیح می‌باشد.

۷۲ **۴** **راه حل اول:**

$$-x<x^۲-۲x<x\Rightarrow \begin{cases} x^۲-۲x+x>۰\Rightarrow x^۲-x>۰\Rightarrow x(x-۱)>۰\Rightarrow x<۰ \text{ یا } x>۱ \\ x^۲-۲x-x<۰\Rightarrow x^۲-۳x<۰\Rightarrow x(x-۳)<۰\Rightarrow ۰<x<۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} ۱<x<۳$$

راه حل دوم: چون $x<|x^۲-۲x|$، پس $x>۰$ است، حال طرفین نامعادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^۲>(x^۲-۲x)^۲\Rightarrow x^۲>x^۴-۴x^۳+۴x^۲\Rightarrow x^۴-۴x^۳+۳x^۲<۰\Rightarrow x^۲(x^۲-۴x+۳)<۰$$

$$\xrightarrow{x^۲>۰} x^۲-۴x+۳<۰\Rightarrow (x-۱)(x-۳)<۰\Rightarrow ۱<x<۳$$

با عددگذاری می‌تونستی خیلی زودتر به جواب برسی. مثلاً $x=۱$ در نامعادله صدق نمی‌کنه ولی $x=۲$ صدق می‌کنه، تنها گزینه‌ای که این شرایط رو داره گزینه‌ی چهاره.

۷۳ **۴** در دو حالت $x\geq ۰$ و $x<۰$ این نامعادله را حل می‌کنیم:

$$x\geq ۰: (x-۴)(x)<۲x-۵\Rightarrow x^۲-۴x<۲x-۵\Rightarrow x^۲-۶x+۵<۰\Rightarrow ۱<x<۵$$

$$x<۰: (x-۴)(-x)<۲x-۵\Rightarrow -x^۲+۴x<۲x-۵\Rightarrow x^۲-۲x-۵>۰\Rightarrow x<(۱-\sqrt{۶}) \text{ یا } x>(۱+\sqrt{۶})\xrightarrow{x<۰} x<(۱-\sqrt{۶})$$

از اجتماع دو بازه‌ی به‌دست آمده، مجموعه جواب به‌صورت $(-\infty,۱-\sqrt{۶})\cup(۱,۵)$ درمی‌آید.

۷۴ **۳** به کمک جدول تعیین علامت، نامساوی $f(x)>g(x)$ را حل می‌کنیم:

$$f(x)>g(x)\Rightarrow ۵-|x-۱|>|۲x|\Rightarrow |۲x|+|x-۱|<۵$$

x		۰		۱	
۲x	−	۰	+		+
x−۱	−		−	۰	+

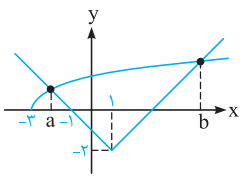
$$x<۰\Rightarrow -۲x-x+۱<۵\Rightarrow ۳x>-۴\Rightarrow x>\frac{-۴}{۳}\xrightarrow{x<۰} -\frac{۴}{۳}<x<۰$$

$$۰\leq x\leq ۱\Rightarrow ۲x-x+۱<۵\Rightarrow x<۴\xrightarrow{۰\leq x\leq ۱} ۰\leq x\leq ۱$$

$$x>۱\Rightarrow ۲x+x-۱<۵\Rightarrow ۳x<۶\Rightarrow x<۲\xrightarrow{x>۱} ۱<x<۲$$

از اجتماع سه بازه‌ی به‌دست آمده، مجموعه جواب به‌صورت $\frac{-۴}{۳}<x<۲$ درمی‌آید.

۷۵ **۳** نمودارهای دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



تابع $y=\sqrt{x+۳}$ در بازه‌ی (a,b)، بالاتر از تابع $f(x)=|x-۱|-۲$ قرار می‌گیرد. برای این‌که نقاط a و b را تعیین کنیم، دو تابع را برابر هم می‌گیریم:

$$x\leq ۱: \sqrt{x+۳}=-x-۱\xrightarrow[x\leq -۱]{\text{توان ۲}} x+۳=x^۲+۲x+۱\Rightarrow x^۲+x-۲=۰\Rightarrow (x-۱)(x+۲)=۰\xrightarrow{x\leq -۱} x=-۲\Rightarrow a=-۲$$

$$x>۱: \sqrt{x+۳}=x-۳\xrightarrow[x\geq ۳]{\text{توان ۲}} x+۳=x^۲-۶x+۹\Rightarrow x^۲-۷x+۶=۰\Rightarrow (x-۱)(x-۶)=۰\xrightarrow{x\geq ۳} x=۶\Rightarrow b=۶$$

پس در بازه‌ی $(-۲,۶)$، نمودار $y=\sqrt{x+۳}$ بالاتر از نمودار $f(x)=|x-۱|-۲$ قرار می‌گیرد، در نتیجه $b-a=۸$.

۷۶ ۴ در دو حالت $x \geq 0$ و $x < 0$ نامعادله را حل می‌کنیم:

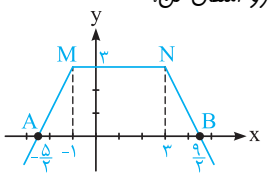
$$x \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x+1} > 2 \xrightarrow{x+1>0} x-1 > 2 \Rightarrow x > 3$$

$$x < 0 \Rightarrow \frac{-x^2-1}{x+1} > 2 \Rightarrow \frac{-x^2-1}{x+1} - 2 > 0 \Rightarrow \frac{-x^2-1-2x-2}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{-x^2-2x-3}{x+1} > 0$$

عبارت $-x^2-2x-3$ همواره منفی است ($\Delta < 0$ و $a < 0$)، پس $x+1 < 0$ و در نتیجه $x < -1$ است، بنابراین جواب نامعادله به‌صورت اجتماع دو بازه‌ی $(3,+\infty)$ و $(-\infty,-1)$ می‌باشد.

برای این‌که سؤال رو خیلی سریع حل کنی می‌تونی با عددگذاری این کارو انجام بدی. مثلاً اعداد $x=-1$، $x=4$ و $x=-2$ رو امتحان کن.

۷۷ ۴ برای رسم تابع $f(x)$، طبق آن‌چه در قسمت آموزش اشاره شد، نقاط به طول ریشه‌های درون قدرمطلق را به دست آورده و به هم وصل می‌کنیم. سپس یک نقطه با طول بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه و یک نقطه با طول کوچک‌تر از کوچک‌ترین ریشه را پیدا کرده و به دو سر نمودار وصل می‌کنیم.



$$f(-2)=1\ ,\ f(-1)=3\ ,\ f(3)=3\ ,\ f(4)=1$$

برای تعیین طول نقاط A و B داریم:

$$x < -1 \Rightarrow f(x) = 7+x+1+x-3 = 2x+5 \xrightarrow{y=0} 2x+5=0 \Rightarrow x_A = \frac{-5}{2}$$

$$x > 3 \Rightarrow f(x) = 7-x-1-x+3 = -2x+9 \xrightarrow{y=0} -2x+9=0 \Rightarrow x_B = \frac{9}{2}$$

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{\text{قاعده‌ی کوچک} + \text{قاعده‌ی بزرگ}}{2} \times \text{ارتفاع} = \frac{7+4}{2} \times 3 = 16/5$$

۷۸ ۲ برای راحتی محاسبات از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$(x-1)^2 = (|x-1|)^2 \Rightarrow 2(|x-1|)^2 - 3|x-1| + 1 = 0 \xrightarrow{|x-1|=t} 2t^2-3t+1=0$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}} t = 1, \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} |x-1|=1 \Rightarrow x-1=\pm 1 \Rightarrow x=2,0 \\ |x-1|=\frac{1}{2} \Rightarrow x-1=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{3}{2},\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = 2+0+\frac{3}{2}+\frac{1}{2} = 4$$

اگه برای حل این تست روش تغییر متغیر به ذهنت نرسید مهم نیست، با تعیین علامت و بازه‌بندی هم می‌تونی سؤال رو حل کنی. (کلاً توی سؤال‌های قدرمطلقی اگر هیچ راهی نداشتی تعیین علامت کن.)

۷۹ ۱ با بازه‌بندی مناسب تابع $f(x)$ را به‌صورت مقابل می‌نویسیم:

$$x < -2 : f(x) = -3x-6-2x+x-1 = -4x-7$$

$$-2 \leq x \leq 1 : f(x) = 3x+6-2x+x-1 = 2x+5$$

$$x > 1 : f(x) = 3x+6-2x-x+1 = 7$$

خط $y=ax+b$ تنها در شرایطی با این تابع بی‌شمار نقطه‌ی مشترک دارد که به یکی از سه صورت $y=-4x-7$، $y=2x+5$ و $y=7$ باشد.

بیشترین مقدار $|a|+|b|$ زمانی اتفاق می‌افتد که $y=ax+b=-4x-7$ باشد، در نتیجه $|a|+|b| = |-4|+|-7| = 11$.

۸۰ ۲ با توجه به رابطه‌ی $|a|-|b| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b|$، روابط گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) صحیح‌اند، اما نامساوی $|a|-|b| \geq |a-b|$ همواره برقرار نیست. (کافی است $a=1$ و $b=-1$ را درنظر بگیرید). در صورت تمایل، اثبات گزینه‌های (۳) و (۴) را ملاحظه کنید:

$$۳)\ |a+b| \leq |a|+|b| \xrightarrow{a \to a-b} |a-b+b| \leq |a-b|+|b| \Rightarrow |a|-|b| \leq |a-b| \xrightarrow{b \to -b} |a|-|b| \leq |a+b|$$

$$۴)\ |a+b| \leq |a|+|b| \xrightarrow{b \to -b} |a-b| \leq |a|+|b|$$

۸۱ ۲

۸۲ ۲ طبق مطالب درسنامه می‌دانیم: $|a+b|<|a|+|b| \Rightarrow ab<0$ بنابراین با در نظر گرفتن $a=2x-1$ و $b=2x+5$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$(2x-1)(2x+5) < 0 \Rightarrow -\frac{5}{2} < x < \frac{1}{2} \Rightarrow -5 < 2x < 1 \Rightarrow -3 < 2x+2 < 3 \Rightarrow |2x+2| < 3$$

۸۳ ۱

نیم‌نگاه

مجموع چند عبارت نامنفی زمانی برابر صفر می‌شود که تک‌تک آن‌ها صفر باشند. بنابراین در این حالت کافی است ریشه‌های هر عبارت را تعیین کرده و سپس بین آن‌ها اشتراک بگیریم. عبارت‌های نامنفی مهم شامل عبارت‌های دارای قدرمطلق، عبارت‌های با توان زوج و عبارت‌های رادیکالی با فرجه‌ی زوج می‌باشند.

باید ریشه‌های معادلات $x^2-3x+2=0$ و $x^3+x^2-4x-4=0$ را به‌دست آورده و سپس اشتراک بگیریم. اما به جای این کار، راحت‌تر است که ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3x+2=0$ را در معادله‌ی درجه‌ی سوم امتحان کرد که اگر صدق کرد، ریشه‌ی مشترک می‌باشد:

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-1)(x-2)=0 \Rightarrow x=1\ ,\ x=2$$

$$x=1 \Rightarrow 1+1-4-4=-6 \neq 0\ \ ,\ \ x=2 \Rightarrow 8+4-8-4=0$$

پس این معادله فقط یک ریشه‌ی $x=2$ دارد.

۸۴ ۱ **راه‌حل اول:** برای حل نامعادله‌ی $\sqrt{x} \geq \frac{3-x}{2}$ دو حالت در نظر می‌گیریم، اگر $\frac{3-x}{2} < 0$ باشد، $(x > 3)$، آن‌گاه چون $\sqrt{x}$ همواره مثبت یا صفر است، نامساوی همواره برقرار می‌شود. حال اگر $\frac{3-x}{2} \geq 0$ باشد $(x \leq 3)$ داریم:

$$\sqrt{x} \geq \frac{3-x}{2} \xrightarrow[\text{توان ۲}]{x\leq 3} x \geq \frac{9+x^2-6x}{4} \Rightarrow x^2-10x+9 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 9 \xrightarrow{x\leq 3} 1 \leq x \leq 3$$

پس مجموعه جواب نامعادله‌ی $\sqrt{x} \geq \frac{3-x}{2}$ به صورت بازه‌ی $[1,+\infty)$ است. با توجه به این بازه، عبارت رادیکالی را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{4x^2-4x+1}-\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(2x-1)^2}-\sqrt{(x-1)^2}=|2x-1|-|x-1| \xrightarrow{x\geq 1} (2x-1)-(x-1)=x$$

راه‌حل دوم: (عددگذاری) کافی است یک عدد دلخواه که در معادله‌ی $x+2\sqrt{x} \geq 3$، صدق می‌کند، انتخاب کنیم، برای مثال $x=2$ را انتخاب می‌کنیم. به ازای این عدد، حاصل عبارت رادیکالی برابر ۲ می‌شود، بنابراین فقط گزینه‌ی (۱) می‌تواند درست باشد.

۸۵ ۲ ابتدا دامنه را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{-x^2+4x+5} > |x-3|+2$$

$$-x^2+4x+5 \geq 0 \Rightarrow x^2-4x-5 \leq 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 5$$

بنابراین با توجه به دامنه‌ی تغییر و ریشه‌ی داخل قدرمطلق خواهیم داشت:

$$-1 \leq x < 3 : \sqrt{-x^2+4x+5} > -x+5 \xrightarrow{\text{توان ۲}} -x^2+4x+5 > x^2-10x+25 \Rightarrow x^2-7x+10 < 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-5) < 0 \Rightarrow 2 < x < 5 \xrightarrow{-1\leq x<3} 2 < x < 3$$

$$3 \leq x \leq 5 : \sqrt{-x^2+4x+5} > x-1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} -x^2+4x+5 > x^2-2x+1 \Rightarrow x^2-3x-2 < 0$$

$$\left(x^2-3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}\right) \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{3-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{17}}{2} \xrightarrow{3\leq x\leq 5} 3 \leq x < \frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

بنابراین مجموعه جواب به‌صورت بازه‌ی $\left(2, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$ می‌باشد.

۸۶ ۳

$$x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -5 \leq -5\cos x \leq 0 \Rightarrow -4 \leq 1-5\cos x \leq 1$$

بنابراین مجموعه‌ی A به‌صورت $A=[-4,1]$ می‌باشد، پس داریم:

$$\min k = \max\{|-4|,|1|\} = 4$$

۸۷ ۲

$$\frac{|x-1||x+2|}{|x|-1} \leq 0$$

ریشه‌های صورت ۲- و ۱ است که $x=1$ غیرقابل قبول می‌باشد (ریشه‌ی مخرج است). صورت همواره نامنفی است، پس مخرج باید منفی باشد:

$$|x|-1<0 \Rightarrow |x|<1 \Rightarrow -1<x<1 \Rightarrow \text{مجموعه جواب}: (-1,1) \cup \{-2\}$$

حال باید حداقل m عدد ۲ باشد تا همه‌ی اعضای مجموعه‌ی A در نامساوی $|x| \leq m$ قرار گیرند.

۸۸ ۲ با توجه به تساوی $\max\{f,-f\}=|f|$ داریم:

$$\max\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right),\left(\frac{1}{x}-x\right)\right\}=\left|x-\frac{1}{x}\right|$$

$$x+\frac{1}{x}=7 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2+\frac{1}{x^2}+2=49 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=47$$

$$\left|x-\frac{1}{x}\right|=A \xrightarrow{A\geq 0} A^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=47-2=45 \Rightarrow A^2=45 \xrightarrow{A\geq 0} A=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

۸۹ ۲

$$0 \leq \big||x|-1\big|+x<\varepsilon \Rightarrow \big||x|-1\big|+x=0 \Rightarrow \big||x|-1\big|=-x$$

در معادله‌ی $\big||x|-1\big|=-x$، چون عبارت سمت چپ همواره مثبت یا صفر است، پس $-x \geq 0$ و در نتیجه $x \leq 0$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$|-x-1|=-x \Rightarrow -x-1=\pm x \Rightarrow \begin{cases} -x-1=-x \Rightarrow \text{جواب ندارد.} \\ -x-1=x \Rightarrow -2x=1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow [11x]=[-5/5]=-6$$

۹۰ ۲ ابتدا دامنه‌ی معادله را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt[4]{1-x^2} : 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \quad , \quad \sqrt[4]{x} : x \geq 0$$

بنابراین دامنه‌ی معادله به صورت بازه‌ی $[0,1]$ است. می‌دانیم در این بازه $\sqrt[4]{x} \geq x$، پس $|x-\sqrt[4]{x}|=\sqrt[4]{x}-x$. بنابراین:

$$|x-\sqrt[4]{x}|+x=\sqrt[4]{1-x^2} \Rightarrow \sqrt[4]{x}-x+x=\sqrt[4]{1-x^2} \Rightarrow \sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{1-x^2} \Rightarrow x=1-x^2 \Rightarrow x^2+x-1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

چون $0 \leq x \leq 1$، پس فقط $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ قابل قبول است.

۹۱ ۴

$|x+۲|<۴ \Rightarrow -۴<x+۲<۴ \Rightarrow -۶<x<۲ \Rightarrow A=\{x \mid x\in \mathbb{R}, x\in(-۶,۲)\}$

$\forall a\in A \Rightarrow -۶<a<۲ \Rightarrow ۴<a+۱۰<۱۲ \Rightarrow \frac{۱}{۱۲}<\frac{۱}{a+۱۰}<\frac{۱}{۴}$

پس حداقل k باید $\frac{۱}{۴}$ باشد تا تمام اعضای مجموعه در نامساوی $-k<\frac{۱}{a+۱۰}<k$ صدق کنند.

$\left(\min k=\max\left\{\left|\frac{۱}{۴}\right|,\left|\frac{۱}{۱۲}\right|\right\}\right)$

۹۲ ۲

طبق نامساوی مثلثی $|a-b|\le|a|+|b|$، پس $\frac{|a-b|}{|a|+|b|}\le ۱$. با در نظر گرفتن $a=x^۲-۱$ و $b=x-۲$ نتیجه می‌گیریم: $(a,b\neq ۰)$

$۰\le\frac{|x^۲-x+۱|}{|x^۲-۱|+|x-۲|}\le ۱$

هم‌چنین عبارت $x^۲-x+۱$ همواره مثبت است. $(a>۰,\Delta<۰)$، پس $۰<\frac{x^۲-x+۱}{|x^۲-۱|+|x-۲|}\le ۱$، یعنی همواره $۰<A\le ۱$ است.

۹۳ ۳

با کمی دقت متوجه می‌شویم که عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر، به‌صورت مربع کامل است:

$x-۹\ge ۰ \Rightarrow x\ge ۹$

$\sqrt{x-۶\sqrt{x-۹}}=۳-\sqrt{x-۹} \Rightarrow \sqrt{(\sqrt{x-۹}-۳)^۲}=۳-\sqrt{x-۹} \Rightarrow |\sqrt{x-۹}-۳|=۳-\sqrt{x-۹}$

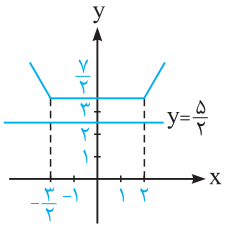
$\Rightarrow \sqrt{x-۹}-۳\le ۰ \Rightarrow \sqrt{x-۹}\le ۳ \Rightarrow x-۹\le ۹ \Rightarrow x\le ۱۸$

با توجه به محدوده‌ی دامنه، مجموعه جواب به صورت $۹\le x\le ۱۸$ درمی‌آید که شامل ۱۰ عدد طبیعی است.

۹۴ ۴

عبارت‌های زیر رادیکال به‌صورت مربع کامل هستند، بنابراین:

$\sqrt{(۲x+۳)^۲}+۲\sqrt{(x-۲)^۲}=۵ \Rightarrow |۲x+۳|+۲|x-۲|=۵ \Rightarrow \left|x+\frac{۳}{۲}\right|+|x-۲|=\frac{۵}{۲}$

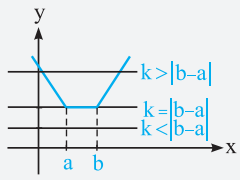


برای تعیین تعداد ریشه‌ها از روش هندسی کمک می‌گیریم. یعنی نمودار توابع $y=\left|x+\frac{۳}{۲}\right|+|x-۲|$ و $y=\frac{۵}{۲}$ را رسم می‌کنیم:

دو نمودار نقطه‌ی مشترک ندارند، پس معادله ریشه ندارد.

برای حل سریع‌تر این تست، از نیم‌نگاه پایین نیز می‌توانید استفاده کنید.

نیم‌نگاه



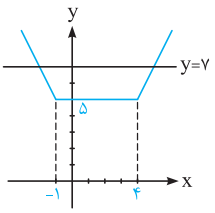
برای حل معادله‌ی $|x-a|+|x-b|=k$، با توجه به نمودارهای $y=|x-a|+|x-b|$ و $y=k$ داریم:

۱ اگر $k<|b-a|$، معادله جواب ندارد.

۲ اگر $k=|b-a|$، معادله بی‌شمار جواب دارد که مجموعه جواب آن بازه‌ی $[a,b]$ است.

۳ اگر $k>|b-a|$، معادله دو جواب $x=\frac{a+b\pm k}{۲}$ دارد.

۹۵ ۲



اگر طول نقطه‌ی مورد نظر را x فرض کنیم، فاصله‌ی x تا -۱ برابر $|x-(-۱)|$ و فاصله‌ی x تا ۴ برابر $|x-۴|$ می‌باشد. بنابراین باید تعداد جواب‌های معادله‌ی $|x-۴|+|x+۱|=۷$ را به‌دست آوریم. با توجه به نکته‌ی قبل، $|b-a|<k$ $(|۴-(-۱)|=۷<k)$ می‌باشد، پس معادله ۲ جواب دارد. در صورتی که نخواهید از نکته استفاده کنید، به کمک رسم می‌توان تعداد جواب‌ها را تعیین کرد.

۹۶ ۴

$y=|۲x+۱|+|۲x+k| \Rightarrow y=۲\left(\left|x+\frac{۱}{۲}\right|+\left|x+\frac{k}{۲}\right|\right)$

ضریب ۲، تاثیری روی محور تقارن این تابع ندارد، پس فقط کافی است محور تقارن تابع گلدانی $y=\left|x-\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right|+\left|x-\left(-\frac{k}{۲}\right)\right|$ را تعیین کنیم:

$x=\frac{a+b}{۲}=\frac{-\frac{۱}{۲}+\left(-\frac{k}{۲}\right)}{۲}=\frac{-۱-k}{۴}\xrightarrow{x=-۲}\frac{-۱-k}{۴}=-۲ \Rightarrow -۱-k=-۸ \Rightarrow k=۷$

۹۷ ۳

براساس درسنامه اگر $k>۳$ باشد معادله دو جواب دارد. بنابراین معادله را در سه حالت زیر حل می‌کنیم:

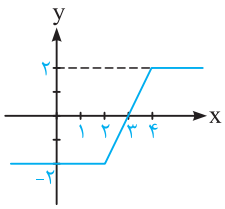
$x<-۱: -x-۱-x+۲=k \Rightarrow -۲x+۱=k \Rightarrow x_۱=\frac{۱-k}{۲}$

$-۱\le x\le ۲: x+۱-x+۲=k \Rightarrow k=۳$ (غ‌ق‌ق)

$x>۲: x+۱+x-۲=k \Rightarrow ۲x-۱=k \Rightarrow x_۲=\frac{k+۱}{۲}$

$x_۱x_۲=-۶ \Rightarrow \frac{۱-k}{۲}\times\frac{۱+k}{۲}=-۶ \Rightarrow \frac{۱-k^۲}{۴}=-۶ \Rightarrow ۱-k^۲=-۲۴ \Rightarrow k^۲=۲۵ \xrightarrow{k>۳} k=۵$

۹۸ ۱ از روش هندسی استفاده می‌کنیم، یعنی نمودار $f(x)=|x-۲|-|x-۴|$ را رسم کرده و محدوده‌ی a را طوری تعیین می‌کنیم که خط $y=\frac{a+۳}{۲}$ با نمودار $f(x)$ فقط یک نقطه‌ی مشترک داشته باشد.



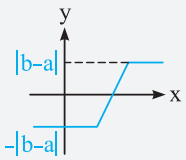
پس برای این‌که خط افقی $y=\frac{a+۳}{۲}$، نمودار f را فقط در یک نقطه قطع کند، باید $-۲<\frac{a+۳}{۲}<۲$ باشد، در نتیجه:

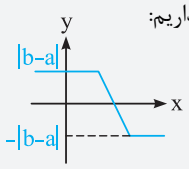
$$-۲<\frac{a+۳}{۲}<۲\Rightarrow -۴<a+۳<۴\Rightarrow -۷<a<۱$$

برای حل سریع‌تر این تست، از نیم‌نگاه پایین نیز می‌توانید استفاده کنید.

نیم‌نگاه

برای حل معادله‌ی $|x-a|-|x-b|=k$، با توجه به نمودارهای $y=|x-a|-|x-b|$ و $y=k$ داریم:



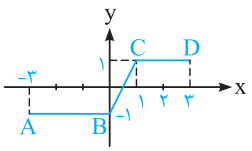


۱ اگر $|k|<|b-a|$، معادله یک جواب دارد.

۲ اگر $|k|=|b-a|$، معادله بی‌شمار جواب دارد.

۳ اگر $|k|>|b-a|$، معادله جواب ندارد.

۹۹ ۴ ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به رابطه‌ی فیثاغورس $BC=\sqrt{۵}$ است. بنابراین داریم:

$$AB+BC+CD=۳+\sqrt{۵}+۲=۵+\sqrt{۵}$$

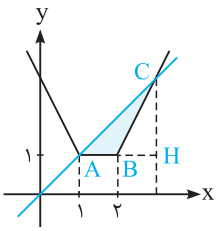
۱۰۰ ۳ می‌دانیم مختصات مرکز تقارن $y=|x-a|-|x-b|$ به صورت $O'(\frac{a+b}{۲},۰)$ و معادله‌ی محور تقارن $x=\frac{a+b}{۲}$، $y=|x-a|+|x-b|$ است. پس مرکز تقارن تابع $y=|x-b|-|x+۲|$ برابر $O'(\frac{-۲+b}{۲},۰)$ است.

ضریب ۲ فقط عرض نقطه رو دو برابر می‌کنه حالا چون عرض صفر هست تغییری روی مرکز تقارن حاصل نمی‌شه.

محور تقارن $y=|x+۳|+|x-۱|$ برابر است با $x=\frac{-۳+۱}{۲}=-۱$. بنابراین:

$$-۱=\frac{-۲+b}{۲}\Rightarrow -۲+b=-۲\Rightarrow b=۰$$

۱۰۱ ۱ نمودار تابع گلدانی $y=|x-۲|+|x-۱|$ و خط $y=x$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.



در نمودار مقابل، برای پیدا کردن نقطه‌ی C پاره‌خط BC را با خط $y=x$ قطع می‌دهیم:

$$BC\text{ معادله‌ی }: x>۲\Rightarrow y=x-۲+x-۱\Rightarrow y=۲x-۳\Rightarrow ۲x-۳=x$$

$$\Rightarrow x_C=۳\Rightarrow y_C=۳\Rightarrow CH=۲\Rightarrow S=\frac{(CH)(AB)}{۲}=\frac{(۲)(۱)}{۲}=۱$$

۱۰۲ ۴

$$f(x)=۲|x-۳|+\sqrt{(۲x+۲)^۲}\Rightarrow f(x)=۲|x-۳|+|۲x+۲|\Rightarrow f(x)=۲(|x-۳|+|x+۱|)$$

$y=|x-۳|+|x+۱|$ یک تابع گلدانی است و محور تقارن آن $x=\frac{a+b}{۲}=\frac{۳+(-۱)}{۲}=۱$ می‌باشد. هم‌چنین ضریب آن یعنی عدد ۲ تأثیری روی محور تقارن تابع ندارد. پس $x=۱$ محور تقارن $f(x)$ است.

$$f(x)=۲(|x-۳|+|x+۱|)\Rightarrow f(۱)=۲(۴)=۸\Rightarrow A(۱,۸)\Rightarrow OA=\sqrt{۱^۲+۸^۲}=\sqrt{۶۵}$$

۱۰۳ ۳ می‌دانیم برد تابع $y=|x-a|+|x-b|$ به‌صورت بازه‌ی $[|b-a|,+\infty)$ می‌باشد، پس برد تابع $y=|x|+|x-۲|$ بازه‌ی $[۲,+\infty)$ است. (با رسم نمودار نیز می‌توان برد این تابع را تعیین کرد). بنابراین داریم:

$$۲\le|x|+|x-۲|<+\infty\Rightarrow ۰<\frac{۱}{|x|+|x-۲|}\le\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۰<\frac{۶}{|x|+|x-۲|}\le ۳$$

$$\Rightarrow R_f=(۰,۳]\Rightarrow a+b=۰+۳=۳$$

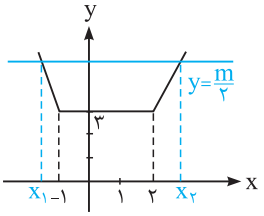
۱۰۴ ۴ می‌دانیم برد تابع $y=|x-a|-|x-b|$ به صورت بازه‌ی $[-|b-a|,|b-a|]$ می‌باشد، پس برد تابع $y=|x-۳|-|x+۶|$، بازه‌ی $[-۹,۹]$ است (این موضوع را با توجه به نمودار آن نیز می‌توان تشخیص داد). برای تابع $f(x)$، قسمت‌های منفی قابل قبول نیست، بنابراین داریم:

$$-۹\le|x-۳|-|x+۶|\le ۹\xrightarrow{\text{با توجه به دامنه}}۰\le|x-۳|-|x+۶|\le ۹\Rightarrow ۰\le\sqrt{|x-۳|-|x+۶|}\le ۳$$

پس $R_f=[۰,۳]$ است که شامل ۴ عدد صحیح می‌باشد.

۱۰۵ ۴ **راه حل اول:**

$$۲(|x+۱|+|x-۲|)=m \Rightarrow |x+۱|+|x-۲|=\frac{m}{۲}$$



محل برخورد نمودارهای $y_۱=\frac{m}{۲}$ و $y_۲=|x+۱|+|x-۲|$ جواب‌های معادله است.

برای این‌که معادله دو جواب داشته باشد، باید $\frac{m}{۲}>۳$ باشد و محل تلاقی دو نمودار به ازای $x>۲$ یا $x<-۱$ به دست می‌آید:

$$x>۲ \Rightarrow x+۱+x-۲=\frac{m}{۲} \Rightarrow ۲x=\frac{m}{۲}+۱ \Rightarrow x_۲=\frac{m}{۴}+\frac{۱}{۲}=\frac{m+۲}{۴}$$

$$x<-۱ \Rightarrow -x-۱-x+۲=\frac{m}{۲} \Rightarrow -۲x=\frac{m}{۲}-۱ \Rightarrow x_۱=\frac{-m}{۴}+\frac{۱}{۲}=\frac{-m+۲}{۴}$$

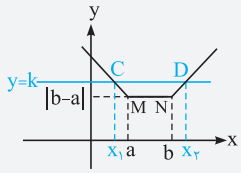
$$x_۲-x_۱=\frac{m+۲}{۴}-\frac{-m+۲}{۴}=\frac{۲m}{۴}=\frac{m}{۲} \Rightarrow \frac{m}{۲}=۴ \Rightarrow m=۸$$

راه حل دوم:

نیم‌نگاه

اگر معادله‌ی $|x-a|+|x-b|=k$ دو ریشه داشته باشد، قدرمطلق تفاضل دو ریشه همواره برابر با k است.

اثبات: می‌دانیم چهارضلعی زیر نمودار تابع گلدانی همواره مربع است. پس چهارضلعی‌های $abNM$ و $x_۱x_۲DC$ مربع‌اند، در نتیجه داریم:

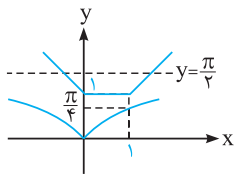


$$MN=|b-a|\ ,\ CD=x_۲-x_۱=k$$

به کمک نیم‌نگاه می‌توان نوشت:

$$|x+۱|+|x-۲|=\frac{m}{۲} \Rightarrow \frac{m}{۲}=۴ \Rightarrow m=۸$$

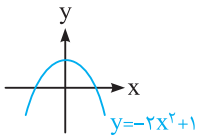
۱۰۶ ۴ ابتدا توابع $y=|x|+|x-۱|$ و $y=|\tan^{-۱}x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



برای این‌که مطمئن شویم تابع $|\tan^{-۱}x|$، تابع گلدانی را در $۰<x<۱$ قطع نمی‌کند کافی است بگوییم $y(۱)=\tan^{-۱}۱=\frac{\pi}{۴}<۱$. حال با توجه به شکل، مشخص است که دو نمودار یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند، پس معادله ریشه ندارد.

۱۰۷ ۱ تابع را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

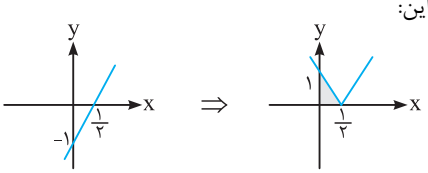
$$y=\begin{cases} x^۲-x^۲+۱ & ;\ x\geq ۰ \\ -x^۲-x^۲+۱ & ;\ x<۰ \end{cases} \Rightarrow y=\begin{cases} ۱ & ;\ x\geq ۰ \\ -۲x^۲+۱ & ;\ x<۰ \end{cases}$$



نمودار $y=۱$، یک خط افقی و نمودار $y=-۲x^۲+۱$، یک سهمی رو به پایین به صورت مقابل است:

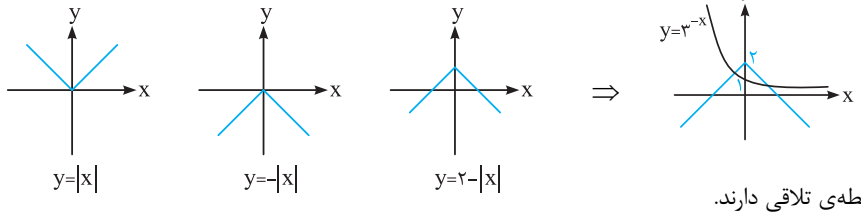
بنابراین نمودار گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۱۰۸ ۳ با توجه به مطالب درسنامه $\text{usgn}\,u=|u|$، پس تابع به‌صورت $y=|۲x-۱|$ درمی‌آید. بنابراین:



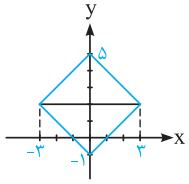
$$\text{مساحت مثلث}=\frac{\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}}{۲}=\frac{۱\times\frac{۱}{۲}}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

۱۰۹ ۳ نمودار دو تابع $y=-|x|+۲$ و $y=(\frac{۱}{۳})^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. مراحل رسم $y=-|x|+۲$ به صورت زیر است:



بنابراین نمودار دو تابع، دو نقطه‌ی تلاقی دارند.

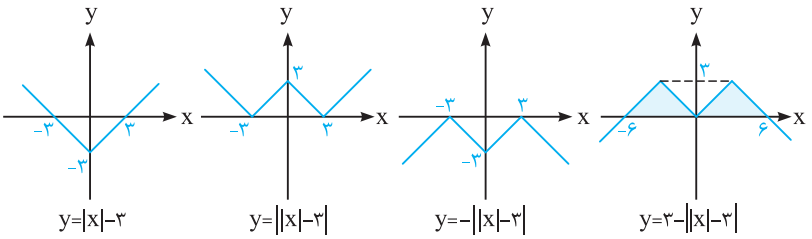
۱۱۰ ۳ می‌دانیم معادله‌ی $|x-a|+|y-b|=k$، نمودار یک مربع به مرکز $O'(a,b)$ است که برای رسم آن کافی است از مرکز، k واحد به سمت چپ و راست، بالا و پایین پیش برویم. پس طول قطرهای مربع $۲k$ و در نتیجه مساحت آن $S=۲k^۲$ می‌باشد. در نتیجه مساحت نمودار معادله‌ی $|x|+|y-۲|=۳$ برابر $۲(۳)^۲=۱۸$ است. به نمودار آن توجه کنید:



۱۱۱ ۳ ضابطه‌ی $fof(x)$ را می‌نویسیم:

$$fof(x) = ۳-|۳-|x||= ۳-||x|-۳|$$

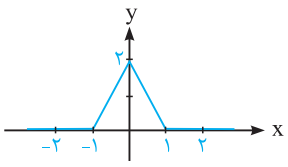
نمودار این تابع را به صورت زیر رسم می‌کنیم:



سطح خواسته شده برابر مجموع مساحت دو مثلث است که مساحت هر مثلث به صورت زیر به‌دست می‌آید: (طول‌های ۶ و ۶- از حل معادله‌ی $۳-||x|-۳| = ۰$ به دست می‌آیند)

$$S = \frac{۱}{۲}(۶)(۳) = ۹ \Rightarrow \text{کل } S = ۱۸$$

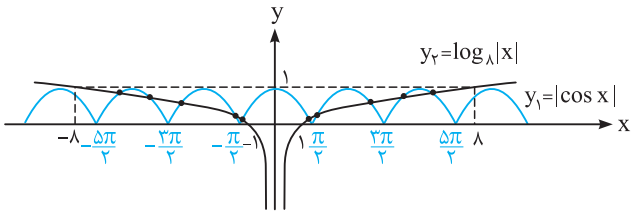
۱۱۲ ۳ برای حل نامعادله‌ی $k \geq |x+۱|-۲|x|+|x-۱|$ از روش هندسی استفاده می‌کنیم.



اگر تابع $y = |x+۱|-۲|x|+|x-۱|$ را رسم کنیم درمی‌یابیم که $۰ \leq y \leq ۲$ می‌باشد. (روش رسم این تابع قدرمطلقی در درس‌نامه توضیح داده شد.)

پس اگر بخواهیم $y \leq k$ باشد، باید حداقل مقدار k برابر ۲ باشد.

۱۱۳ ۴ دو منحنی $y_۱ = |\cos x|$ و $y_۲ = \log_۸|x|$ را در یک دستگاه محور مختصات رسم می‌کنیم:

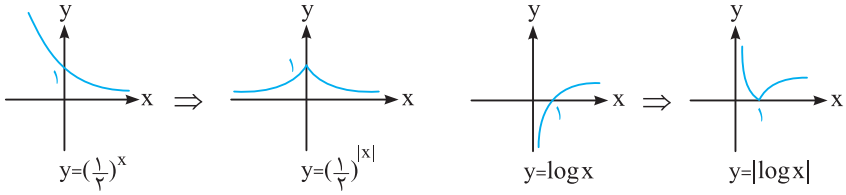


برای رسم درست باید بدونی که $\log_۸ ۱ = ۰$ و $\log_۸ ۸ = ۱$ *می‌شه، در ضمن عدد ۸ یک کم از* $\frac{۵\pi}{۲}$ *بیشتره.*

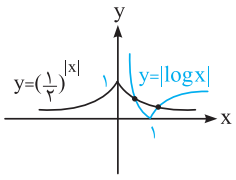
با توجه به نمودار، به ازای $|x| > ۸$ دو منحنی نقطه‌ی تلاقی ندارند، زیرا $|\cos x| < ۱ < |\log_۸ x|$. پس دو نمودار ۱۰ نقطه‌ی تلاقی دارند و در نتیجه معادله دارای ۱۰ ریشه است.

۱۱۴ ۲ دو تابع $y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{|x|}$ و $y = |\log x|$ را رسم می‌کنیم:

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{|x|} = |\log x|$$



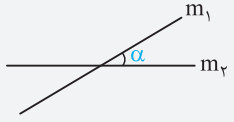
طبق شکل روبه‌رو، دو نمودار همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.



۱۱۵ ۲

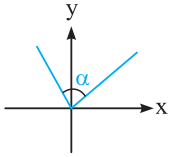
نیم‌نگاه

زاویه‌ی بین دو خط به شیب‌های $m_۱$ و $m_۲$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:



$$\tan\alpha = \left|\frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱ m_۲}\right|$$

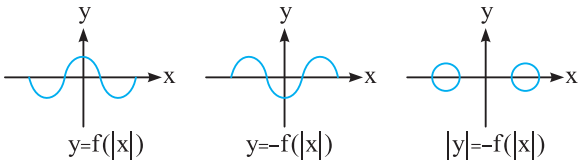
$$y = |۲x-|-x|| \Rightarrow y = |۲x-|x|| \Rightarrow y = \begin{cases} x \geq ۰ : |۲x - x| = |x| = x \\ x < ۰ : |۲x + x| = |۳x| = -۳x \end{cases}$$



با توجه به این‌که $m_۱ = ۱$ و $m_۲ = -۳$ داریم:

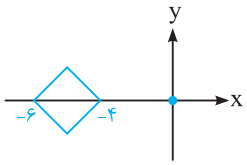
$$\tan\alpha = \left|\frac{۱-(-۳)}{۱+(-۳)(۱)}\right| = ۲$$

۱۱۶ **۲** مراحل رسم نمودار منحنی به صورت زیر می‌باشد:



بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

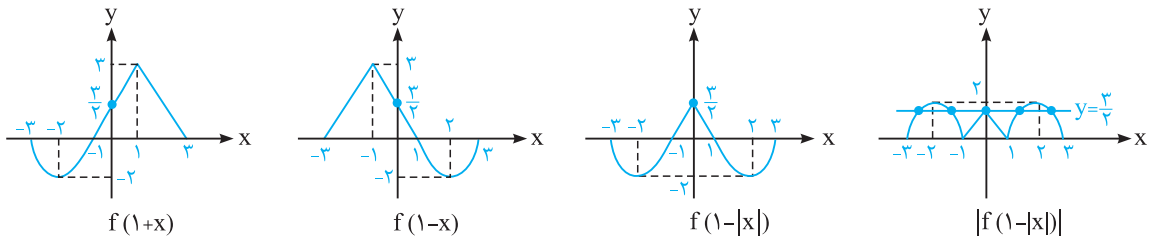
۱۱۷ **۲** ابتدا نمودار $y = f(x)$ را به ازای $y \geq 0$ رسم کرده و سپس قرینه‌ی این نمودار را نسبت به محور x ها به دست می‌آوریم.



معمولاً پیه‌ها به نقطه‌ی مبدأ توجه نمی‌کنند و می‌گن دو (و حتی چهار) محور تقارن داره ولی برای مثال $x = -5$ محور تقارن نیست.

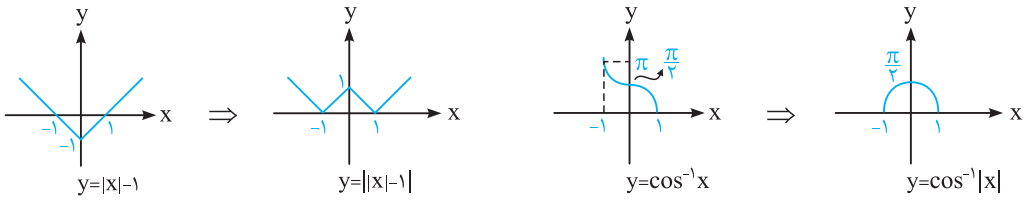
محور تقارن این منحنی فقط محور x ها $(y = 0)$ است.

۱۱۸ **۴** به کمک رسم نمودار، معادله را حل می‌کنیم. بنابراین به ترتیب $f(1+x)$، $f(1-x)$، $f(1-|x|)$ و در نهایت $y = |f(1-|x|)|$ را رسم می‌کنیم.

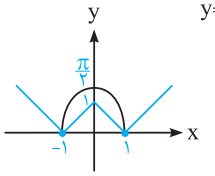


با توجه به نمودار، خط $y = \frac{3}{2}$ منحنی را در ۵ نقطه قطع می‌کند.

۱۱۹ **۲** به کمک رسم دو نمودار $y = ||x|-1|$ و $y = \cos^{-1}|x|$ تعداد ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

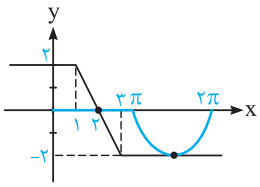


حال دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



پس معادله دو ریشه دارد.

۱۲۰ **۲** به روش هندسی تعداد جواب‌های معادله را تعیین می‌کنیم. پس در ابتدا نمودار توابع $f(x) = \sin x - |\sin x|$ و $g(x) = |x-3| - |x-1|$ را رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار f، آن را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:



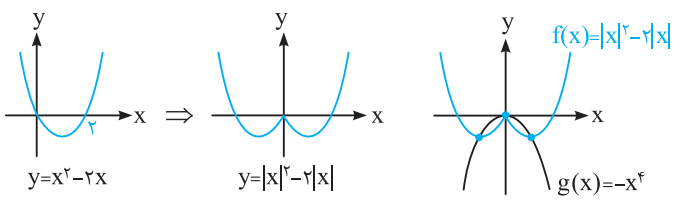
$$f(x) = \sin x - |\sin x| = \begin{cases} \sin x - \sin x = 0 & ; 0 \leq x \leq \pi \\ \sin x + \sin x = 2\sin x & ; \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

بنابراین دو نمودار در دو نقطه مشترک هستند، پس معادله دو ریشه دارد.

۱۲۱ **۳** به کمک روش هندسی تعداد ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم:

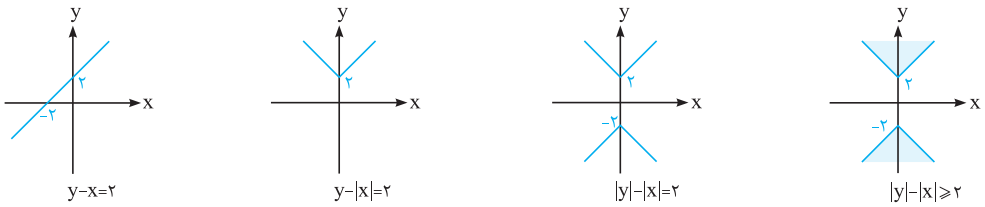
$$x^2 - 2|x| = -x^4 \xrightarrow{|x|^2 = x^2} |x|^2 - 2|x| = -x^4$$

نمودارهای $g(x) = -x^4$ و $f(x) = |x|^2 - 2|x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

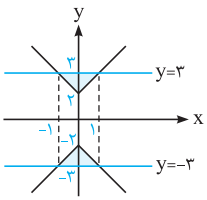


با توجه به نمودار، معادله سه ریشه دارد.

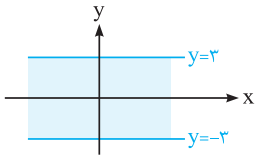
۱۲۲ برای رسم $|y|-|x|\geq ۲$ ابتدا نمودار $|y|-|x|=۲$ را رسم می‌کنیم:



از اشتراک دو نمودار خواهیم داشت:

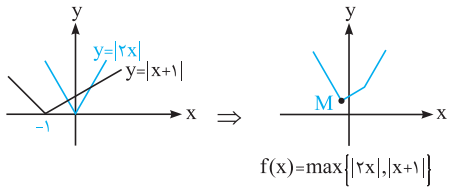


$$|y|\leq ۳ \Rightarrow -۳\leq y\leq ۳$$



$$\text{مساحت مثلث}=\frac{\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}}{۲}=\frac{۱\times ۲}{۲}=۱ \Rightarrow \text{مجموع مساحت دو مثلث}=۲$$

۱۲۳ ابتدا نمودار توابع $y=|x+۱|$ و $y=|۲x|$ را در یک دستگاه رسم کرده و سپس به‌ازای هر x، مقدار بزرگ‌تر را تعیین می‌کنیم:

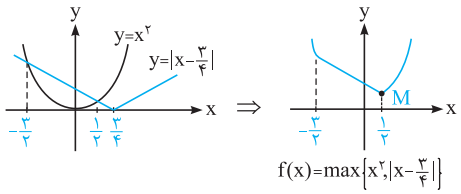


تابع در نقطه‌ی M دارای کم‌ترین مقدار است. برای پیدا کردن مختصات آن دو تابع را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$|۲x|=|x+۱| \Rightarrow \begin{cases} ۲x=x+۱ \Rightarrow x=۱ \\ ۲x=-x-۱ \Rightarrow x=\frac{-۱}{۳} \end{cases}$$

یعنی مختصات M به‌صورت $\left(\frac{-۱}{۳},\frac{۲}{۳}\right)$ است. بنابراین کم‌ترین مقدار $f(x)$ برابر $\frac{۲}{۳}$ می‌باشد.

۱۲۴ ابتدا نمودار توابع $y=x^۲$ و $y=\left|x-\frac{۳}{۴}\right|$ را در یک دستگاه رسم کرده و سپس به‌ازای هر x، مقدار بزرگ‌تر را تعیین می‌کنیم:



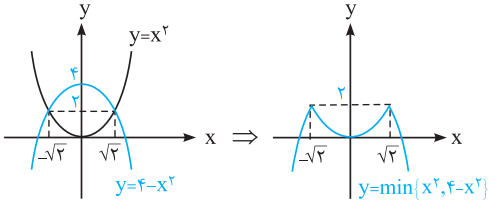
تابع در نقطه‌ی M دارای کم‌ترین مقدار است. برای پیدا کردن مختصات آن، دو تابع را مساوی هم قرار می‌دهیم. البته چون دو نقطه‌ی تلاقی در ناحیه‌ی $x<\frac{۳}{۴}$ است، پس $\left|x-\frac{۳}{۴}\right|=\frac{۳}{۴}-x$، در نتیجه:

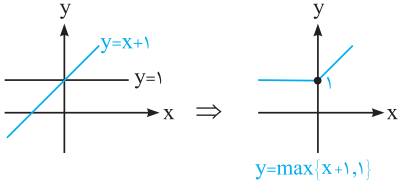
$$x^۲=\frac{۳}{۴}-x \Rightarrow ۴x^۲+۴x-۳=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲},\frac{-۳}{۲} \Rightarrow M\left(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴}\right)$$

پس کم‌ترین مقدار تابع برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

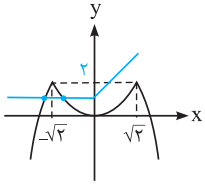
۱۲۵ نمودارهای $y=\max\{x+۱,۱\}$ و $y=\min\{x^۲,۴-x^۲\}$ را رسم می‌کنیم:

$$x^۲=۴-x^۲ \Rightarrow ۲x^۲=۴ \Rightarrow x^۲=۲ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$



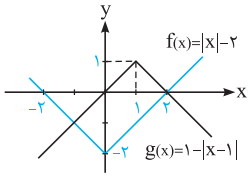


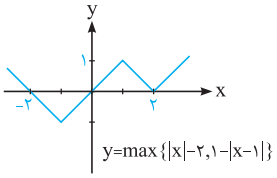
حال دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:

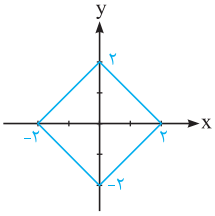


بنابراین نمودار دو تابع همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند، پس معادله دو ریشه دارد.

۱۲۶ **۴** ابتدا نمودارهای $f(x)=|x|-۲$ و $g(x)=۱-|x-۱|$ را در یک دستگاه مختصات رسم کرده و سپس تابع ماکزیمم را تعیین می‌کنیم:







نمودار $|x|+|y|=۲$ نمودار یک مربع به مرکز مبدأ و قطر ۴ است.

دو نمودار در دو بازه‌ی $۱\le x\le ۲$ و $-۲\le x\le -۱$ بر هم منطبق‌اند، پس بی‌شمار نقطه‌ی مشترک دارند.

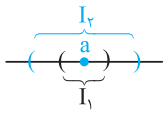
۱۲۷ **۴** می‌دانیم در همسایگی $|x-a|<r$، مرکز a و شعاع r است. بنابراین:

$$|۲x-۲a+۶|<a+۲\Rightarrow ۲|x-a+۳|<a+۲\Rightarrow |x-a+۳|<\frac{a+۲}{۲}$$

$$\Rightarrow |x-(a-۳)|<\frac{a+۲}{۲}\Rightarrow \text{مرکز}=a-۳=۵\Rightarrow a=۸\Rightarrow \text{شعاع}=\frac{a+۲}{۲}=\frac{۱۰}{۲}=۵$$

۱۲۸ **۱** در مجموعه جواب گزینه‌ی (۱)، a متعلق به همسایگی است، پس این گزینه همسایگی غیرمحذوف است و نادرست می‌باشد. بقیه‌ی گزینه‌ها با توجه به مطالب درسنامه، نمایش همسایگی محذوف متقارن هستند.

۱۲۹ **۲** اگر $I_۱$ همسایگی متقارن a به شعاع $r_۱$ و $I_۲$ همسایگی متقارن a به شعاع $r_۲$ باشد، همواره $I_۱\cup I_۲$ برابر همسایگی بزرگ‌تر شده، زیرا با توجه به شکل زیر، یکی از همسایگی‌ها، زیرمجموعه‌ی دیگری است. بنابراین با فرض $r_۲>r_۱$ داریم:



$$I_۱\cup I_۲=I_۲\ ,\ I_۱\cap I_۲=I_۱$$

پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۱۳۰ **۴**

$$\text{(مرکز همسایگی)}\quad ۳=\frac{a+۵+۳a-۷}{۲}\Rightarrow ۶=۴a-۲\Rightarrow a=۲$$

$$\text{(شعاع همسایگی)}\quad r=\frac{(a+۵)-(۳a-۷)}{۲}\overset{a=۲}{=\!=}\frac{۸}{۲}=۴$$

۱۳۱ **۳** شعاع همسایگی متقارن برابر $\frac{b}{۲}$ است.

$$|۲x-۵|<b\Rightarrow ۲\left|x-\frac{۵}{۲}\right|<b\Rightarrow \left|x-\frac{۵}{۲}\right|<\frac{b}{۲}\Rightarrow$$

برای محاسبه‌ی شعاع همسایگی متقارن محذوف ابتدا باید a را محاسبه کنیم. در این همسایگی مرکز برابر ۲ است. بنابراین:

$$\frac{۲a+۵-a+۲}{۲}=۲\Rightarrow a+۷=۴\Rightarrow a=-۳\Rightarrow (-۱,۵)-\{۲\}\Rightarrow \text{شعاع همسایگی}=\frac{۵-(-۱)}{۲}=۳$$

$$\Rightarrow \frac{b}{۲}=۳\Rightarrow b=۶$$

۱۳۲ **۴** اگر $(a,b)\cup(c,d)$ (با فرض $a<c$) همسایگی محذوف متقارن باشد، آن‌گاه $b=c=\frac{a+d}{۲}$.

$$a+۲b=a-b=\frac{۳a-۱+b}{۲}\Rightarrow\begin{cases}b=۰\\a=۱\end{cases}$$

پس بازه‌ها به صورت $(۱,۰)\cup(۲,۱)$ می‌شود که نادرست است.

می‌دونیم اجتماع خاصیت جابه‌جایی داره حالا از کجا معلوم جاشون عوض نشده باشه، پس اگه به جواب نرسیدی جاشون رو تغییر بده.

$$(a-b,b)\cup(۳a-۱,a+۲b)$$

$$b=۳a-۱=\frac{a-b+a+۲b}{۲}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\b=۲\end{cases}\overset{(-۱,۲)\cup(۲,۵)}{\Longrightarrow} ab=۲$$

۱۳۳ **۲** مرکز همسایگی محذوف $(۱,۲x)-\{y\}$ برابر $y=\frac{۱+۲x}{۲}$ و مرکز همسایگی محذوف $(x,z)\cup(z,۳)$ برابر $z=\frac{x+۳}{۲}$ است، چون هر دو، همسایگی محذوف عدد مشترکی هستند، پس داریم:

$$\frac{۱+۲x}{۲}=\frac{x+۳}{۲}\Rightarrow ۲x+۱=x+۳\Rightarrow x=۲\Rightarrow y=\frac{۵}{۲}\ ,\ z=\frac{۵}{۲}\Rightarrow x+y+z=۷$$

۱۳۴ **۳** هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) $\frac{۴}{x^۲}>۱\overset{x\neq ۰}{\Longrightarrow} x^۲<۴\Rightarrow (-۲<x<۲)-\{۰\}$

پس مجموعه جواب این نامعادله به‌صورت اجتماع دو بازه $(۰,۲)\cup(-۲,۰)$ است.

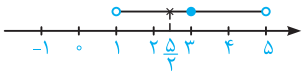
(۲) مجموعه جواب $|x+۲|<۱>۰$ به‌صورت یک همسایگی محذوف متقارن به مرکز -۲ و شعاع ۱ است که متشکل از دو بازه می‌باشد.

(۳) جواب معادله‌ی $[|x|]=۰$ به‌صورت $|x|<۱\ge ۰$ و در نتیجه $-۱<x<۱$ می‌باشد که فقط از یک بازه تشکیل شده است.

(۴) $|x|(۱-x)(۱+x)>۰\overset{x\neq ۰}{\Longrightarrow}(۱-x)(۱+x)>۰\Rightarrow x\in(-۱,۰)\cup(۰,۱)$

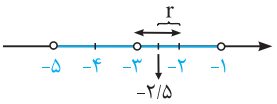
جواب این نامعادله متشکل از دو بازه است.

۱۳۵ ۳ مجموعه جواب $|x-۳|<۲$، یک بازه‌ی متقارن به مرکز ۳ و شعاع ۲ می‌باشد. با توجه به نمودار، حداکثر مقدار δ برای بازه‌ی متقارن، فاصله‌ی $\frac{۵}{۲}$ تا ۱ است. پس: $\max\delta=\frac{۳}{۲}$.



۱۳۶ ۱ $۰<|x+۳|<۲$ یک همسایگی محذوف متقارن به مرکز ۳- و شعاع ۲ می‌باشد.

با توجه به نمودار بیشترین مقدار r برابر است با $\frac{۱}{۲}$.



۱۳۷ ۲

$$|۲x-۱|>|x-۳| \xrightarrow{\text{توان ۲}} (۲x-۱)^۲>(x-۳)^۲ \Rightarrow (۲x-۱)^۲-(x-۳)^۲>۰$$

$$\Rightarrow (۲x-۱-x+۳)(۲x-۱+x-۳)>۰ \Rightarrow (x+۲)(۳x-۴)>۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x>\frac{۴}{۳} \text{ یا } x<-۲$$

با فرض $a<b$ داریم:

$$x<a \text{ یا } x>b \Leftrightarrow \left|x-\frac{a+b}{۲}\right|>\frac{b-a}{۲}$$

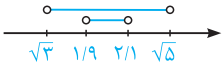
بنابراین:

$$x<-۲ \text{ یا } x>\frac{۴}{۳} \Leftrightarrow \left|x-\frac{-۲+\frac{۴}{۳}}{۲}\right|>\frac{\frac{۴}{۳}-(-۲)}{۲} \Rightarrow \left|x+\frac{۱}{۳}\right|>\frac{۵}{۳} \xrightarrow{\times ۳} |۳x+۱|>۵ \Rightarrow a=۱\ ,\ b=۵ \Rightarrow (a,b)=(۱,۵)$$

۱۳۸ ۱ ابتدا مجموعه‌جواب نامعادله را به‌دست می‌آوریم:

$$|x^۲-۴|<۱ \Rightarrow -۱<x^۲-۴<۱ \Rightarrow ۳<x^۲<۵ \Rightarrow \sqrt{۳}<|x|<\sqrt{۵} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{۳}<x<\sqrt{۵} \\ \text{یا} \\ -\sqrt{۵}<x<-\sqrt{۳} \end{cases}$$

حالا باید این مجموعه‌جواب را با بازه‌ی $(۱/۹,۲/۱)=\left(۲-\frac{۱}{۱۰},۲+\frac{۱}{۱۰}\right)$ اشتراک دهیم. بازه‌ی $(-\sqrt{۵},-\sqrt{۳})$ با بازه‌ی $(۱/۹,۲/۱)$ اشتراک ندارد. پس با توجه به شکل، اشتراک دو بازه‌ی $(\sqrt{۳},\sqrt{۵})$ و $(۱/۹,۲/۱)$ به صورت $(۱/۹,۲/۱)$ درمی‌آید.



۱۳۹ ۴ دامنه‌ی نامعادله به‌صورت بازه‌ی $[-\sqrt{۵},\sqrt{۵}]$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\sqrt{۵-x^۲}<۱/۲ \Rightarrow ۵-x^۲<۱/۴۴ \Rightarrow x^۲>۳/۵۶ \Rightarrow x>\sqrt{۳/۵۶} \text{ یا } x<-\sqrt{۳/۵۶}$$

بازه‌ی متقارن به مرکز ۲ و شعاع ۰/۲ بازه‌ی $(۱/۸,۲/۲)$ می‌باشد. برای تعیین اشتراک این بازه و مجموعه جواب نامعادله از شکل زیر استفاده می‌کنیم.

توجه داشته باشید که $۲/۲<\sqrt{۵}$ زیرا $۴/۸۴<۵$. همچنین $۱/۸<\sqrt{۳/۵۶}$ زیرا $۳/۲۴<۳/۵۶$.

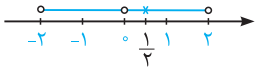
بنابراین مجموعه جواب به صورت بازه‌ی $(\sqrt{۳/۵۶},۲/۲)$ درمی‌آید.

۱۴۰ ۴ مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $x^۴-۴x^۲<۰$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۴-۴x^۲<۰ \Rightarrow x^۲(x^۲-۴)<۰$$

x		-۲		۰		۲	
$x^۲(x^۲-۴)$	$+$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$+$

$$\Rightarrow x\in(-۲,۰)\cup(۰,۲)$$



در این تست باید به این موضوع توجه کرد که همسایگی محذوف داریم و صفر در مجموعه نیست.

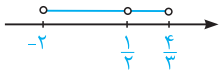
با توجه به نمودار، حداکثر مقدار δ فاصله‌ی $\frac{۱}{۲}$ تا صفر است، پس: $\max\delta=\frac{۱}{۲}$.

۱۴۱ ۱ با در نظر گرفتن دامنه، ابتدا مجموعه‌جواب نامعادله را تعیین می‌کنیم:

$$\left|\frac{x-۳}{۲x-۱}\right|>۱ \xrightarrow{x\neq\frac{۱}{۲}} |x-۳|>|۲x-۱| \xrightarrow{\text{توان ۲}} (x-۳)^۲>(۲x-۱)^۲ \Rightarrow (x-۳)^۲-(۲x-۱)^۲>۰$$

$$(x-۳-۲x+۱)(x-۳+۲x-۱)>۰ \Rightarrow (-x-۲)(۳x-۴)>۰ \Rightarrow -۲<x<\frac{۴}{۳}$$

بنابراین محدوده‌ی x به‌صورت مقابل درمی‌آید:



در این شکل، دو بازه وجود دارد که بازه‌ی بزرگ‌تر $\left(-۲,\frac{۱}{۲}\right)$ است. بنابراین:

مرکز همسایگی بزرگ‌تر : $a=\frac{-۲+\frac{۱}{۲}}{۲}=\frac{-۳}{۴}$

توی این سؤال بیشترین اشتباهی که بچه‌ها انجام می‌دن اینه که یادشون می‌ره $\frac{۱}{۲}$ رو از دور x بردارن. پس شما هیچ‌وقت دامنه رو فراموش نکنید.

۱۴۲ ۲ برای اینکه $\left(n^۲-۹۹\ ,\ \frac{۲n}{n+۵}\right)$ یک همسایگی برای عدد یک باشد، باید $n^۲-۹۹<۱<\frac{۲n}{n+۵}$ باشد.

$$n^۲-۹۹<۱ \Rightarrow n^۲<۱۰۰ \Rightarrow n<۱۰ \Rightarrow n=۱,۲,\cdots,۹$$

$$\frac{۲n}{n+۵}>۱ \Rightarrow ۲n>n+۵ \Rightarrow n>۵ \Rightarrow n=۶,۷,۸,\cdots$$

اشتراک دو نامساوی عبارت است از اعداد ۶، ۷، ۸ و ۹ یعنی چهار همسایگی وجود دارد.

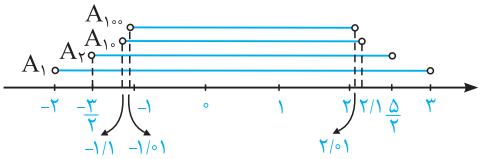
۱۴۳ ۱ زمانی (a,b) معرف یک همسایگی یا بازه است که $b > a$ باشد.

$$۰/۶۷۶ = \frac{۶۷۶-۶۷}{۹۰۰} = \frac{۶۰۹}{۹۰۰} = \frac{۲۰۳}{۳۰۰}$$

$$\frac{۲n+۵}{۳n+۳} > \frac{۲۰۳}{۳۰۰} \Rightarrow \frac{۲n+۵}{n+۱} > \frac{۲۰۳}{۱۰۰} \Rightarrow ۲۰۰n+۵۰۰ > ۲۰۳n+۲۰۳ \Rightarrow ۳n < ۲۹۷ \Rightarrow n < ۹۹$$

پس ۹۸ عدد طبیعی وجود دارد.

۱۴۴ ۲ بازه‌های $A_۱$، $A_۲$، $A_{۱۰}$ و $A_{۱۰۰}$ را مشخص می‌کنیم:



$$A_n = \left(-\left(۱+\frac{۱}{n}\right), \left(۲+\frac{۱}{n}\right)\right)$$

$$A_۱ = (-۲,۳),\ A_۲ = \left(-\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲}\right),\ A_{۱۰} = (-۱/۱, ۲/۱),\ A_{۱۰۰} = (-۱/۰۱, ۲/۰۱), \cdots$$

با توجه به شکل بالا اشتراک تمام بازه‌ها به‌صورت $[-۱,۲]$ در می‌آید.

۱۴۵ ۴ مجموعه جواب نامعادله تنها در شرایطی یک بازه است که مقدار $a^۲-۲a-۸$ منفی باشد. در غیر این حالت مجموعه جواب به‌صورت اجتماع دو بازه در می‌آید.

$$a^۲-۲a-۸ < ۰ \Rightarrow (a+۲)(a-۴) < ۰ \Rightarrow -۲ < a < ۴ \Rightarrow a \in \{-۱,۰,۱,۲,۳\}$$

۱۴۶ ۱ ابتدا به کمک جدول تعیین علامت، نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{x^۲+x-۶} - \frac{۱}{x^۲-۵x+۴} > ۰ \Rightarrow \frac{x^۲-۵x+۴-x^۲-x+۶}{(x^۲+x-۶)(x^۲-۵x+۴)} > ۰ \Rightarrow P = \frac{-۶x+۱۰}{(x-۲)(x+۳)(x-۱)(x-۴)} > ۰$$

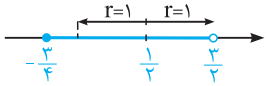
x		-۳		۱		۵/۳		۲		۴	
P	+	‖	-	‖	+	۰	-	‖	+	‖	-

پس مجموعه جواب به‌صورت $(-\infty,-۳) \cup (۱,\frac{۵}{۳}) \cup (۲,۴)$ می‌باشد که شامل دو بازه‌ی کران‌دار و یک بازه‌ی بی‌کران است.

۱۴۷ ۱ ابتدا مجموعه جواب نامعادله را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{-x}{۳} - ۱ < x < \frac{x}{۳} + ۱ \Rightarrow \begin{cases} \frac{۲x}{۳} < ۱ \Rightarrow x < \frac{۳}{۲} \\ \frac{۴x}{۳} > -۱ \Rightarrow x > \frac{-۳}{۴} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \frac{-۳}{۴} < x < \frac{۳}{۲}$$

بیشترین مقدار r در شکل مقابل نشان داده شده است:



$$\max r = \frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۱$$

۱۴۸ ۲ می‌دانیم $\max\{x,-x\} = |x|$، بنابراین:

$$|۲\sqrt{x}-۳| < ۱ \Rightarrow -۱ < ۲\sqrt{x}-۳ < ۱ \Rightarrow ۲ < ۲\sqrt{x} < ۴ \Rightarrow ۱ < \sqrt{x} < ۲ \Rightarrow ۱ < x < ۴$$

$$\Rightarrow \left|x-\frac{۵}{۲}\right| < \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = \frac{۵}{۲},\ r = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a+r = ۴$$

۱۴۹ ۴ دامنه‌ی نامعادله $x \geq ۰$ است. برای حل نامعادله، دو سمت آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$|\sqrt{x}-۲| < |\sqrt{x}-۴| \xrightarrow{\text{توان ۲}} (\sqrt{x}-۲)^۲ < (\sqrt{x}-۴)^۲ \Rightarrow x-۴\sqrt{x}+۴ < x-۸\sqrt{x}+۱۶ \Rightarrow ۴\sqrt{x} < ۱۲ \Rightarrow \sqrt{x} < ۳ \Rightarrow x < ۹$$

پس براساس شرط $x \geq ۰$ جواب مجموعه‌ی A به‌صورت $[۰,۹)$ می‌باشد. حال برای این‌که این مجموعه جواب، معرف یک همسایگی متقارن محذوف باشد، باید اعداد صفر و $\frac{۹}{۲}$ را از روی آن برداریم:

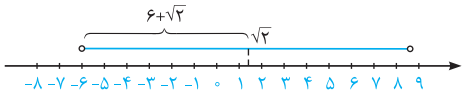
$$A - \{a,b\} = [۰,۹) - \left\{۰, \frac{۹}{۲}\right\} = (۰,۹) - \left\{\frac{۹}{۲}\right\} \Rightarrow a+b = ۰+\frac{۹}{۲} = ۴/۵$$

۱۵۰ ۳

$$a = \frac{۱-a+۲a+۱}{۲} \Rightarrow a = \frac{a+۲}{۲} \Rightarrow ۲a = a+۲ \Rightarrow a = ۲$$: نقطه‌ی میانی بازه

بنابراین بازه‌ی موردنظر $(-۱,۵)$ و طول آن برابر ۶ است. چون m و n دو عدد متعلق به این بازه است، فاصله‌ی آن‌ها یعنی $|m-n|$ همواره کوچک‌تر از طول بازه می‌باشد پس $|m-n| < ۶$.

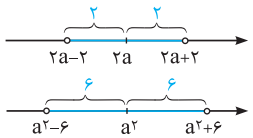
۱۵۱ ۳ وقتی از $\sqrt{۲}$ به سمت چپ و راست به‌صورت متقارن پیش برویم، اولین عدد مضرب ۳ که به آن می‌رسیم عدد صفر است و بعد از آن به‌ترتیب ۳، -۳، ۶ و -۶ می‌باشد. چون حداکثر r را می‌خواهیم، پس بیشترین شعاع، فاصله‌ی $\sqrt{۲}$ تا پنجمین عدد مضرب ۳ یعنی -۶ است.



$$\max(r) = \sqrt{۲} - (-۶) = \sqrt{۲}+۶$$

۱۵۲ ۴ *زمانی اجتماع دو بازه یک بازه می‌شه که بازه‌ها از هم جدا نباشن، یعنی اشتراک داشته باشن.*

برای آن‌که دو بازه اشتراک داشته باشند، باید دو شرط زیر برقرار باشد:



شرط اول: $a^۲-۶ < ۲a+۲ \Rightarrow a^۲-۲a-۸ < ۰ \Rightarrow (a+۲)(a-۴) < ۰ \Rightarrow -۲ < a < ۴$

شرط دوم: $۲a-۲ < a^۲+۶ \Rightarrow a^۲-۲a+۸ > ۰ \xrightarrow{\Delta<۰}$ همواره برقرار است.

پس مجموعه‌ی مقادیر a برابر است با $-۲ < a < ۴$ و مقادیر صحیح a عبارت‌اند از: ۳، ۲، ۱، ۰ و -۱

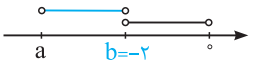
۱۵۳ ۳ از صورت سؤال، نتیجه می‌گیریم، بازه‌های I_1 و I_2 اشتراک دارند.

$$\left.\begin{matrix} I_1=(2-r_1,2+r_1) \\ I_2=(8-r_2,8+r_2) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{I_1\cap I_2\neq\varnothing} I_1\cup I_2=(2-r_1,8+r_2)$$

$$3/5=\frac{2-r_1+8+r_2}{2}\Rightarrow 10+r_2-r_1=7\Rightarrow r_2-r_1=-3\Rightarrow |r_2-r_1|=3$$

توجه داشته باشید که با در نظر گرفتن $I_1\cup I_2=(8-r_2,2+r_1)$ نیز به همین جواب می‌رسیدیم.

۱۵۴ ۳ ابتدا مجموعه جواب نامعادله را به‌دست می‌آوریم:



$$x^2+2x<0\Rightarrow x(x+2)<0\Rightarrow -2<x<0\Rightarrow x\in(-2,0)$$

برای این‌که $(a,b)\cup(-2,0)$ یک همسایگی متقارن محذوف باشد، باید:

$$b=-2=\frac{a+0}{2}\Rightarrow a=-4\Rightarrow b-a=-2-(-4)=2$$

توجه داشته باشید که اگر بازه‌ی (a,b) را به‌صورت $(0,2)$ درنظر بگیریم، با فرض مسئله که $b<0$ است مطابقت ندارد.

۱۵۵ ۱ با توجه به تساوی $|x|^2=x^2$ دو سمت را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(x^2+2x+3)^2<(x^2+2x-3)^2\Rightarrow (x^2+2x+3)^2-(x^2+2x-3)^2<0$$

$$(x^2+2x+3-x^2-2x+3)(x^2+2x+3+x^2+2x-3)<0\Rightarrow 6(2x^2+4x)<0$$

$$\Rightarrow 12x(x+2)<0\Rightarrow -2<x<0\Rightarrow \left|x-\frac{-2+0}{2}\right|<\frac{0-(-2)}{2}\Rightarrow |x+1|<1$$

بنابراین مرکز برابر -1 و شعاع برابر ۱ می‌شود، پس $\beta-\alpha=1-(-1)=2$.

۱۵۶ ۱

$$-1<\sqrt{x+5}<1\Rightarrow 0<x+5<1\Rightarrow 0<x+5<1\Rightarrow -5<x<-4\Rightarrow \left|x+\frac{9}{2}\right|<\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{-1}{2}<x+\frac{9}{2}<\frac{1}{2}$$

همسایگی متقارن به مرکز $\frac{-9}{2}$ و شعاع $\frac{1}{2}$:

در سؤال‌های رادیکالی بعضی وقتا قیافه‌ی زیر رادیکال رو که نگاه می‌کنی شاید فکر کنی مربع کامل نیست ولی با کمی دقت می‌فهمی که می‌شه از زیر رادیکال خارجش کرد.

$$A=\sqrt{(\sqrt{x+5}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+5}-1)^2}=|\sqrt{x+5}+1|+|\sqrt{x+5}-1|$$

چون $\sqrt{x+5}<1$ پس مقدار $\sqrt{x+5}-1$ منفی است، بنابراین:

$$A=\sqrt{x+5}+1-\sqrt{x+5}+1=2$$

۱۵۷ ۱ ابتدا محدوده‌ی x را تعیین می‌کنیم:

$$-1<x<2\Rightarrow \frac{-3}{2}<x-\frac{1}{2}<\frac{3}{2}\Rightarrow \left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2}$$

همسایگی متقارن به مرکز $\frac{1}{2}$ و شعاع $\frac{3}{2}$:

همیشه نامعادله می‌دادن، جوابشو می‌خواستن، الان برعکس شده، جواب رو داده خود نامعادله رو می‌خواد.

پس باید ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+2=0$ اعداد -1 و ۲ باشند و در ضمن مقدار a باید منفی باشد تا جواب نامعادله بین ریشه‌ها قرار گیرد:

$$\begin{cases} a-b+2=0 \\ 4a+2b+2=0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} 2a-2b=-4 \\ 4a+2b=-2 \end{cases}\Rightarrow a=-1\,,\ b=1\Rightarrow a+b=0$$

۱۵۸ ۳

$$\cos x\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)<0\Rightarrow \frac{\cos^2 x}{\sin x}<0\Rightarrow \begin{cases} \sin x<0 \\ \cos x\neq 0 \end{cases}\Rightarrow x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$$

پس مجموعه جواب نامعادله، یک همسایگی متقارن محذوف به مرکز $\frac{3\pi}{2}$ و به شعاع $\frac{\pi}{2}$ است.

۱۵۹ ۳

$$\alpha<x^2+3x<\beta\Rightarrow \alpha<\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}<\beta\Rightarrow \alpha+\frac{9}{4}<\left(x+\frac{3}{2}\right)^2<\beta+\frac{9}{4}$$

برای این‌که نامساوی بالا به‌صورت همسایگی متقارن محذوف درآید، باید $\alpha+\frac{9}{4}$ صفر شود:

$$\alpha=-\frac{9}{4}\Rightarrow 0<\left|x+\frac{3}{2}\right|<\sqrt{\beta+\frac{9}{4}}\Rightarrow \text{شعاع}=\frac{7}{2}=\sqrt{\beta+\frac{9}{4}}\Rightarrow \beta+\frac{9}{4}=\frac{49}{4}\Rightarrow \beta=10\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{-9}{4}+10=7/75$$

۱۶۰ ۳ همسایگی محذوف متقارن به مرکز $\frac{-1}{2}$ و شعاع r به‌صورت $0<\left|x+\frac{1}{2}\right|<r$ است، بنابراین:

$$\frac{1}{\left|x+\frac{1}{2}\right|}>\frac{1}{r}\Rightarrow \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}>\frac{1}{r^2}\Rightarrow \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}}>\frac{1}{r^2}$$

با مقایسه‌ی نامعادله‌ی به‌دست آمده و صورت سؤال نتیجه می‌گیریم $\frac{1}{r^2}=4$، پس $r=\frac{1}{2}$.

۱۶۱ ۳

$$\left[\frac{۲x-۱}{x}\right]=۳\Rightarrow ۳\le\frac{۲x-۱}{x}<۴\Rightarrow ۳\le ۲-\frac{۱}{x}<۴\Rightarrow ۱\le\frac{-۱}{x}<۲$$

از نامساوی $۱\le\frac{-۱}{x}<۲$ نتیجه می‌گیریم $\frac{-۱}{x}$ حتماً مثبت است. از طرفی می‌دانیم اگر a و b مثبت باشند و $a>b$، آن‌گاه $\frac{۱}{a}<\frac{۱}{b}$. بنابراین:

$$۱\le\frac{-۱}{x}<۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}<-x\le ۱\Rightarrow -۱\le x<\frac{-۱}{۲}\Rightarrow a+b=-۱+\left(\frac{-۱}{۲}\right)=\frac{-۳}{۲}$$

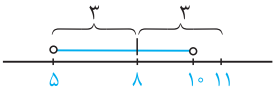
۱۶۲ ۲ ابتدا محدوده‌ی x را به‌دست می‌آوریم:

$$[x^۲+x]=-۱\Rightarrow -۱\le x^۲+x<۰\Rightarrow\begin{cases}x^۲+x<۰\Rightarrow x(x+۱)<۰\Rightarrow -۱<x<۰\\ x^۲+x+۱\ge ۰\xrightarrow{\Delta<۰,a>۰}\text{همواره برقرار است.}\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}-۱<x<۰$$

اگر $-۱<x<۰$ باشد، آن‌گاه $۰<x^{۲۰}<۱$ می‌شود و در نتیجه $[x^{۲۰}]=۰$ است.

۱۶۳ ۲

$$\left[\frac{x}{۵}\right]=۱\Rightarrow ۱\le\frac{x}{۵}<۲\Rightarrow ۵\le x<۱۰\xrightarrow{x\neq ۵}A=(۵,۱۰)$$



با توجه به نمودار، کوچک‌ترین همسایگی به مرکز ۸ که همه‌ی اعضای A را شامل شود، شعاعی برابر $۳=۵-۸$ دارد.

۱۶۴ ۳ **راه حل اول:** معمولاً این تست‌ها طوری طراحی می‌شه که عبارت زیر رادیکال بین دو عدد مربع کامل متوالی باشه تا جزءصحیحش یک عدد منحصر به فرد در بیاد.

$$n^۲+۲n+۱<n^۲+۴n<n^۲+۴n+۴\Rightarrow (n+۱)^۲<n^۲+۴n<(n+۲)^۲\Rightarrow n+۱<\sqrt{n^۲+۴n}<n+۲\Rightarrow\left[\sqrt{n^۲+۴n}\right]=n+۱$$

$$۴n^۲<۴n^۲+n<۴n^۲+۴n+۱\Rightarrow (۲n)^۲<۴n^۲+n<(۲n+۱)^۲\Rightarrow ۲n<\sqrt{۴n^۲+n}<۲n+۱\Rightarrow\left[\sqrt{۴n^۲+n}\right]=۲n$$

$$\Rightarrow\text{حاصل}=۲(n+۱)-۲n=۲$$

راه حل دوم: (عددگذاری) با انتخاب $n=۱$ داریم:

$$۲[\sqrt{۵}]-[\sqrt{۵}]=[\sqrt{۵}]=۲$$

۱۶۵ ۳ با توجه به تعریف جزءصحیح $[x]=\max\{n\in\mathbb{Z}\mid n\le x\}$ داریم:

$$\left[\frac{x}{۵}\right]=\frac{x}{۳}\xrightarrow{\frac{x}{۳}\in\mathbb{Z}}\frac{x}{۳}\le\frac{x}{۵}<\frac{x}{۳}+۱\xrightarrow{\times ۱۵}۵x\le ۳x<۵x+۱۵$$

$$\begin{cases}۵x\le ۳x\Rightarrow x\le ۰\\ ۵x+۱۵>۳x\Rightarrow ۲x>-۱۵\Rightarrow x>\frac{-۱۵}{۲}\end{cases}\Rightarrow\frac{-۱۵}{۲}<x\le ۰\Rightarrow\frac{-۵}{۲}<\frac{x}{۳}\le ۰$$

$$\frac{x}{۳}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{x}{۳}=۰\Rightarrow x=۰\ \text{یا}\ \frac{x}{۳}=-۱\Rightarrow x=-۳\ \text{یا}\ \frac{x}{۳}=-۲\Rightarrow x=-۶$$

پس معادله ۳ جواب دارد.

۱۶۶ ۲ با تعیین محدوده‌ی $(۲+\sqrt{۳})^۵$، جزءصحیح آن را به‌دست می‌آوریم:

$$(۲+\sqrt{۳})^۵=۷۲۴-(۲-\sqrt{۳})^۵$$

$$۰<۲-\sqrt{۳}<۱\Rightarrow ۰<(۲-\sqrt{۳})^۵<۱\Rightarrow -۱<-(۲-\sqrt{۳})^۵<۰\Rightarrow ۷۲۳<۷۲۴-(۲-\sqrt{۳})^۵<۷۲۴$$

یعنی عبارت $(۲+\sqrt{۳})^۵$ عددی بین ۷۲۳ و ۷۲۴ است، بنابراین جزءصحیح آن برابر ۷۲۳ می‌باشد.

۱۶۷ ۳

$$\frac{[|x|]}{x}=۰\xrightarrow{x\neq ۰}[|x|]=۰\Rightarrow ۰\le|x|<۱\xrightarrow{x\neq ۰}۰<|x|<۱$$

با توجه به این‌که $۰<|x-a|<\delta$ یک همسایگی محذوف متقارن به مرکز a و شعاع δ است، پس $۰<|x|<۱$ به مفهوم همسایگی محذوف متقارن به مرکز صفر و شعاع ۱ است.

۱۶۸ ۳ می‌دانیم اگر $k\in\mathbb{Z}$، آن‌گاه $[x+k]=[x]+k$. بنابراین:

$$[\overbrace{۲[x]+۱}^{\text{عدد صحیح}}+x]=۲[x]+۱+[x]=۳[x]+۱$$

$$-۶<۳[x]+۱<۴\Rightarrow -۷<۳[x]<۳\Rightarrow\frac{-۷}{۳}<[x]<۱\Rightarrow -۲\le x<۱\Rightarrow\min k=\max\{|-۲|,|۱|\}\Rightarrow\min k=۲$$

شاید خیلی جاها به این نامساوی‌ها برخورد کردی، مثلاً $۵<[x]\le ۶$، $-۲<[x]\le\frac{۳}{۲}$ یا ... و ممکنه دنبال رابطه‌ای برای حل این سؤال‌ها رفته باشی. ولی هیچ رابطه‌ای نمی‌فواد، فقط چند تا عدد اطراف دو سر بازه بده تا معدوده‌ی جواب‌ها رو بتونی پیدا کنی. در اینجا مجموعه جواب به‌ترتیب $۵<x\le -۱$ و $۷>x\ge ۲$ می‌شه.

۱۶۹ ۲

$$[x]\le -۳\Rightarrow x<-۲$$

از $x<-۲$ می‌توان نتیجه گرفت حتماً x منفی است و چون دو سمت نامساوی هم علامت‌اند، پس بعد از معکوس کردن، جهت عوض می‌شود:

$$x<-۲\Rightarrow\frac{-۱}{۲}<\frac{۱}{x}<۰\Rightarrow\frac{-۵}{۲}<\frac{۵}{x}<۰\Rightarrow A=\left(\frac{-۵}{۲},۰\right)$$

بنابراین مجموعه‌ی A شامل دو عدد صحیح -۱ و -۲ می‌باشد.

۱۷۰ ۲

$$\frac{۱}{[x]} > \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۰ < [x] < ۳ \Rightarrow ۱ \le x < ۳ \xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} x \in (۱,۲) \cup (۲,۳)$$

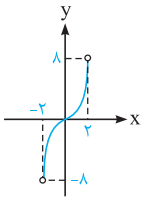
پس مجموعه جواب، به‌صورت همسایگی متقارن محذوف ۲ به شعاع ۱ است.

۱۷۱ ۴ می‌دانیم اگر $x \notin \mathbb{Z}$، آن‌گاه $[-x] + [x] = -۱$. بنابراین داریم:

$$۲[x] + [-x] = ۰ \Rightarrow [x] + [x] + [-x] = ۰ \xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} [x] - ۱ = ۰ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow ۱ \le x < ۲$$

$$\xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} ۱ < x < ۲ \Rightarrow \text{مرکز} = a = \frac{۱+۲}{۲} = \frac{۳}{۲} \quad , \quad \text{شعاع} = b = \frac{۲-۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a + b = ۲$$

۱۷۲ ۴ با توجه به نمودار، برد تابع $f(x) = x^۳$ در بازه‌ی $(-۲,۲)$ به‌صورت $(-۸,۸)$ است. طبق دستور رسم نمودار $[f(x)]$، باید خطوط $y = k \ (k \in \mathbb{Z})$ را رسم کرده و سپس نقاط بین دو خط متوالی را روی خط پایینی تصویر کنیم.



بنابراین نمودار $[x^۳]$ شامل ۱۶ پاره‌خط به معادلات $y = -۸$، $y = -۷$، ... و $y = ۷$ می‌باشد.

۱۷۳ ۱

$$f(x - f(x)) = f(x - [x]) = [x - [x]]$$

می‌دانیم $۰ \le x - [x] < ۱$ بنابراین $[x - [x]] = ۰$

۱۷۴ ۱

$$x^۲ + x < ۰ \Rightarrow x(x+۱) < ۰ \Rightarrow -۱ < x < ۰$$

با فرض $-۱ < x < ۰$ نتیجه می‌گیریم $۰ < x^۲ < ۱$، $-۱ < x^۳ < ۰$ و $۰ < x^۴ < ۱$. بنابراین داریم:

$$[x] + [x^۲] + [x^۳] + [x^۴] = (-۱) + ۰ + (-۱) + ۰ = -۲$$

۱۷۵ ۱

$$\begin{cases} ۱۰۰ < ۷۴۷ < ۱۰۰۰ \Rightarrow \log ۱۰۰ < \log ۷۴۷ < \log ۱۰۰۰ \Rightarrow ۲ < \log ۷۴۷ < ۳ \Rightarrow [\log ۷۴۷] = ۲ \\ ۰/۰۰۱ < ۰/۰۰۳ < ۰/۰۱ \Rightarrow \log ۱۰^{-۳} < \log ۰/۰۰۳ < \log ۱۰^{-۲} \Rightarrow -۳ < \log ۰/۰۰۳ < -۲ \Rightarrow [\log ۰/۰۰۳] = -۳ \end{cases} \Rightarrow \text{حاصل} = ۲ - (-۳) = ۵$$

۱۷۶ ۲

$$\begin{cases} ۱ < ۲ < ۶ \Rightarrow \log_۶ ۱ < \log_۶ ۲ < \log_۶ ۶ \Rightarrow ۰ < \log_۶ ۲ < ۱ \Rightarrow [\log_۶ ۲] = ۰ \\ ۲^۲ < ۶ < ۲^۳ \Rightarrow \log_۲ ۲^۲ < \log_۲ ۶ < \log_۲ ۲^۳ \Rightarrow ۲ < \log_۲ ۶ < ۳ \Rightarrow [\log_۲ ۶] = ۲ \end{cases} \Rightarrow \text{حاصل} = ۰ + ۲ = ۲$$

۱۷۷ ۴

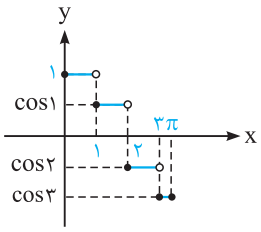
$$y = \left(۲\left(\frac{x}{۲} - \left[\frac{x}{۲}\right]\right)\right)^۲ \Rightarrow y = ۴\left(\frac{x}{۲} - \left[\frac{x}{۲}\right]\right)^۲$$

می‌دانیم $۰ \le u - [u] < ۱$، بنابراین:

$$۰ \le \frac{x}{۲} - \left[\frac{x}{۲}\right] < ۱ \Rightarrow ۰ \le \left(\frac{x}{۲} - \left[\frac{x}{۲}\right]\right)^۲ < ۱ \Rightarrow ۰ \le ۴\left(\frac{x}{۲} - \left[\frac{x}{۲}\right]\right)^۲ < ۴ \Rightarrow R_y : [۰,۴)$$

پس برد تابع شامل ۴ عدد صحیح ۰، ۱، ۲ و ۳ می‌باشد.

۱۷۸ ۴ بازه‌ی $[۰,\pi]$ را به بازه‌هایی به طول صحیح تقسیم می‌کنیم:



$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow y = \cos ۰ = ۱$$
$$۱ \le x < ۲ \Rightarrow y = \cos ۱$$
$$۲ \le x < ۳ \Rightarrow y = \cos ۲$$
$$۳ \le x < \pi \Rightarrow y = \cos ۳$$

با توجه به نمودار، تابع از چهار پاره‌خط تشکیل شده است.

اگه عرض خطها رو نفهمیدی، پس این‌جا رو دقت کن!

اول این‌که چون علامت درجه نداریم، پس $\cos ۱$، $\cos ۲$ و $\cos ۳$ همگی برحسب رادیان هستن. در ضمن می‌دونیم هر رادیان تقریباً ۵۷° (یا راحت‌تر بگیم ۶۰°) هست. حالا می‌شه گفت $\cos ۱$ تقریباً برابر $۰/۵$ هست $(\cos ۶۰^\circ = ۰/۵)$ یا $\cos ۲$ تقریباً برابر $-۰/۵$ $(\cos ۱۲۰^\circ = -۰/۵)$ می‌شه.

۱۷۹ ۳ اگر $k \in \mathbb{Z}$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$\left[\frac{x}{۳}\right] + \left[\frac{-x}{۳}\right] = \begin{cases} ۰ & x = ۳k \\ -۱ & x \ne ۳k \end{cases}$$

پس نامعادله‌ی $\left|\left[\frac{x}{۳}\right] + \left[-\frac{x}{۳}\right]\right| < ۱$ زمانی برقرار است که $k \in \mathbb{Z}$ و $x = ۳k$ باشد از طرفی داریم:

$$\left|\frac{۱}{x}\right| > \frac{۱}{۱۰} \Rightarrow |x| < ۱۰ \ , \ x \ne ۰ \Rightarrow x \in (-۱۰,۰) \cup (۰,۱۰)$$

اعداد صحیح مضرب ۳ این مجموعه جواب عبارت است از: ± ۳، ± ۶ و ± ۹، یعنی دستگاه شامل ۶ جواب است.

۱۸۰ ۱

$$[x] + \left[x + \frac{۲}{۳} + ۱\right] + \left[x + \frac{۱}{۳} - ۲\right] + \left[۳x + \frac{۱}{۲}\right] = ۰ \Rightarrow [x] + \left[x + \frac{۲}{۳}\right] + \left[x + \frac{۱}{۳}\right] + ۱ - ۲ + \left[۳x + \frac{۱}{۲}\right] = ۰$$

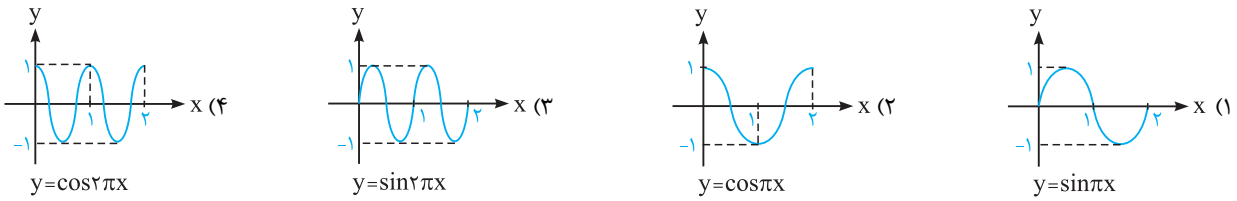
با توجه به این‌که $[۳x] = [x] + \left[x + \frac{۱}{۳}\right] + \left[x + \frac{۲}{۳}\right]$ داریم:

$$[۳x] + \left[۳x + \frac{۱}{۲}\right] = ۱ \Rightarrow [۶x] = ۱ \Rightarrow ۱ \le ۶x < ۲ \Rightarrow \frac{۱}{۶} \le x < \frac{۲}{۶} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{۱}{۶} + \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

۱۸۱ ۱

$$0 \le x < 1 \Rightarrow f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) \ge 0$$
$$1 \le x < 2 \Rightarrow -f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) \le 0$$
$$2 \le x < 3 \Rightarrow f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) \ge 0$$

و همین روند روی $\mathbb{R}$ ادامه پیدا می‌کند، یعنی $f(x)$ یک واحد در میان، مثبت و منفی می‌شود. حال به کمک رسم نمودارها بررسی می‌کنیم کدام گزینه این ویژگی را دارد:



بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

اگه نمودارها رو راحت نتونستی رسم کنی، نگران نباش. در فصل مثلثات به‌خصوص بعد از تابع متناوب تسلطت بیشتر می‌شه.

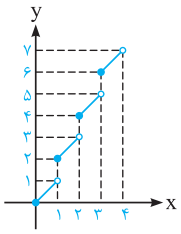
۱۸۲ ۲ هر دو عبارت زیر رادیکال به صورت مربع کامل هستند، بنابراین:

$$\sqrt{x^2 - 2x\sqrt{x} + x} + \sqrt{1 + x - 2\sqrt{x}} = \sqrt{(x - \sqrt{x})^2} + \sqrt{(\sqrt{x} - 1)^2} = |x - \sqrt{x}| + |\sqrt{x} - 1|$$

چون $[x^2] = 0$، پس $x^2 < 1$ است. از طرفی دامنه‌ی عبارت بالا، $x \ge 0$ می‌باشد، بنابراین محدوده‌ی x به صورت $0 \le x < 1$ درمی‌آید و می‌دانیم در این بازه $\sqrt{x} \ge x$ و $\sqrt{x} \le 1$ است. پس داریم:

$$|x - \sqrt{x}| + |\sqrt{x} - 1| = \sqrt{x} - x + 1 - \sqrt{x} = 1 - x$$

۱۸۳ ۲ نمودار $y = |x| + [x]$ را رسم می‌کنیم:



$$0 \le x < 1 \Rightarrow y = x$$
$$1 \le x < 2 \Rightarrow y = x + 1$$
$$2 \le x < 3 \Rightarrow y = x + 2$$
$$3 \le x < 4 \Rightarrow y = x + 3$$

با توجه به نمودار، مقدار تابع نمی‌تواند ۳/۵ باشد.

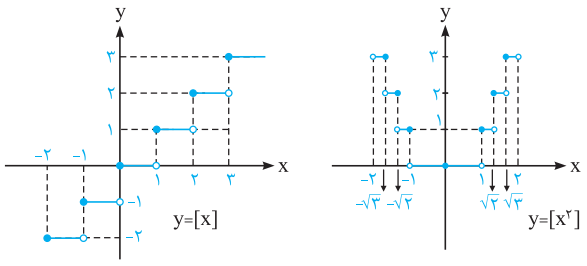
۱۸۴ ۱ در معادله‌ی $-|x| = [3x^2 - 2x] - 4$، عبارت سمت چپ، یعنی $[3x^2 - 2x] - 4$ همواره یک عدد صحیح است، پس نتیجه می‌گیریم $-|x|$ نیز باید صحیح باشد. بنابراین داریم:

$$-|x| \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3x^2 - 2x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [3x^2 - 2x] = 3x^2 - 2x$$

$$3x^2 - 2x - 4 = -|x| \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 : \ 3x^2 - 2x - 4 = -x \Rightarrow 3x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1, \frac{4}{3} \xrightarrow{x \ge 0} x = \frac{4}{3} \\ x < 0 : \ 3x^2 - 2x - 4 = x \Rightarrow 3x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{6} \xrightarrow{x < 0} x = \frac{3 - \sqrt{57}}{6} \end{cases}$$

هر دو جواب به دست آمده، غیرصحیح هستند، پس هیچ‌یک از ریشه‌ها قابل قبول نمی‌باشند.

۱۸۵ ۴ ابتدا دو منحنی $y = [x]$ و $y = [x^2]$ را رسم می‌کنیم:



نقاط مشترک دو نمودار $0 \le x < \sqrt{2}$ است. حال برای آن‌که مجموعه جواب به‌صورت همسایگی متقارن محذوف درآید کافی است نقاط صفر و $\frac{\sqrt{2}}{2}$ را از بازه حذف کنیم:

$$[0, \sqrt{2}) - \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) \Rightarrow a + b = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۸۶ ۱ برای این‌که از رابطه‌ی $\forall n \in \mathbb{N} : a \le b < a + \frac{c}{n} \Rightarrow a = b$ استفاده کنیم، ابتدا نامساوی را در منفی ضرب می‌کنیم:

$$3 - \frac{1}{n} < x + 2[-x]^2 \le 3 \Rightarrow -3 \le -x - 2[-x]^2 < -3 + \frac{1}{n} \Rightarrow -x - 2[-x]^2 = -3 \Rightarrow x + 2[-x]^2 = 3$$

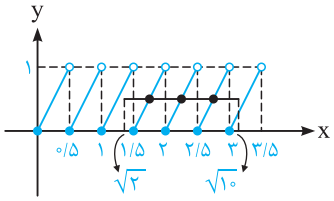
چون $2[-x]^2$ و ۳ صحیح هستند، پس x باید صحیح باشد، بنابراین برای x نمی‌توان هیچ عدد غیرصحیحی اختیار کرد.

۱۸۷ **۲** با توجه به رابطه‌ی $\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=[x]+\left[\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}\right]$ می‌توان نتیجه گرفت $[۲x]=[x]+\left[\frac{x}{۲}\right]$، بنابراین:

$$\left[\frac{x}{۲}-[x]\right]=-۲\xrightarrow{[x]\in\mathbb{Z}}\left[\frac{x}{۲}\right]-[x]=-۲\Rightarrow\left[\frac{x}{۲}\right]-\left[\frac{x}{۲}\right]-\left[\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}\right]=-۲$$

$$\Rightarrow\left[\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}\right]=۲\Rightarrow۲\le\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}<۳\Rightarrow۱/۵\le\frac{x}{۲}<۲/۵\Rightarrow۳\le x<۵\Rightarrow a=۳\ ,\ b=۵\Rightarrow b-a=۲$$

۱۸۸ **۳** به کمک روش هندسی، تعداد جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم. برای این کار نمودار توابع $f(x)=۲x-[۲x]$ و $g(x)=\frac{۱}{۲}$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، معادله دارای سه جواب است که ریشه‌های آن ۱/۷۵، ۲/۲۵ و ۲/۷۵ است. (توجه داشته باشید که $\sqrt{۲}>۱/۲۵$ و $\sqrt{۱۰}<۳/۲۵$ است.)

۱۸۹ **۱** با توجه به $[f(x)]+[-f(x)]=\begin{cases}۰ & f\in\mathbb{Z}\\ -۱ & f\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ داریم:

$$۵x\in\mathbb{Z}:۵x-(-۵x)=۲\Rightarrow۱۰x=۲\Rightarrow x=\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}$$

$$۵x\notin\mathbb{Z}:[۵x]-(-۱-[۵x])=۲\Rightarrow۲[۵x]=۱\Rightarrow[۵x]=\frac{۱}{۲}$$

چون $\frac{۱}{۲}$ صحیح نیست، پس معادله‌ی $[۵x]=\frac{۱}{۲}$ جواب ندارد و تنها ریشه‌ی معادله $x=\frac{۱}{۵}$ است.

۱۹۰ **۲** ابتدا حاصل $\left[\tan\frac{\pi}{۸}\right]$ را تعیین می‌کنیم:

$$۰<\frac{\pi}{۸}<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow۰<\tan\frac{\pi}{۸}<۱\Rightarrow\left[\tan\frac{\pi}{۸}\right]=۰$$

می‌دانیم $\tan\frac{۵\pi}{۸}=\tan\left(\pi-\frac{۳\pi}{۸}\right)=-\tan\frac{۳\pi}{۸}$، بنابراین:

$$\left[\tan\frac{\pi}{۸}\right]+\left[\tan\frac{۳\pi}{۸}\right]+\left[\tan\frac{۵\pi}{۸}\right]=۰+\left[\tan\frac{۳\pi}{۸}\right]+\left[-\tan\frac{۳\pi}{۸}\right]$$

با توجه به این‌که اگر $x\notin\mathbb{Z}$، پس $[-x]+[x]=-۱$، در نتیجه حاصل عبارت برابر -۱ می‌شود.

۱۹۱ **۳** *در این تست چون مساحه‌ی A وقت‌گیره از گزینه‌ها کمک می‌گیریم. البته بررسی گزینه‌ها هم وقت‌گیره ولی بهتر از مساحه‌ی A هست.*

۱) اگر $A=۱-\frac{۱}{۱۳}=\frac{۱۲}{۱۳}$ آن‌گاه $A=۱-\frac{۱}{۱۳}=\frac{۱۲}{۱۳}$. از طرفی کسر $\frac{۱۲}{۱۳}$ متناوب ساده است (زیرا مخرج از عامل اول غیر ۲ و ۵ تشکیل شده است). در صورتی که A متناوب مرکب می‌باشد. پس گزینه‌ی (۱) نادرست است.

۲) اگر $A=۱-\frac{۵}{۷۱}=\frac{۶۶}{۷۱}$، آن‌گاه $A=\frac{۶۶}{۷۱}$ که کسر $\frac{۶۶}{۷۱}$ متناوب ساده است. پس گزینه‌ی (۲) نیز نادرست است.

۳) اگر $A=۱-\frac{۱}{۱۴}=\frac{۱۳}{۱۴}$، آن‌گاه $A=\frac{۱۳}{۱۴}$

خوب دیگه، چاره‌ای نیست، باید ۱۳ رو به ۱۴ تقسیم کنیم ولی دیگه عملیات تقسیم‌رو نمی‌نویسیم:

$$۱۳\div۱۴=۰/\overline{۹۲۸۵۷۱۴}$$

۴) اگر $A=۱-\frac{۷}{۹۲}=\frac{۸۵}{۹۲}$، آن‌گاه $A=\frac{۸۵}{۹۲}$ که کسر متناوب مرکب است اما داریم:

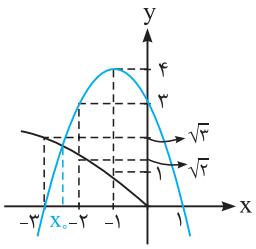
$$۸۵\div۹۲=۰/۹۲۳\cdots$$

بنابراین گزینه ی (۳) صحیح است.

۱۹۲ **۲** به روش هندسی محدوده‌ی جواب را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۲+۲x+\sqrt{-x}\ge۳\Rightarrow\sqrt{-x}\ge-x^۲-۲x+۳$$

حال بر روی یک محور مختصات، دو تابع $y=\sqrt{-x}$ و $y=-x^۲-۲x+۳$ را رسم می‌کنیم:



محل تلاقی دو تابع در نقطه‌ای به طول $x_۰$ است که $-۳<x_۰<-۲$. پس جواب نامعادله به‌صورت $(-\infty,x_۰]$ می‌باشد، یعنی در بازه‌ی $(-۱۰,۰)$ جواب‌های صحیح نامعادله عبارت‌اند از -۳، -۴، -۵، -۶، -۷، -۸ و -۹، پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۱۹۳ **۳**

$$\frac{-۲}{x^۴+x}>۰\Rightarrow x^۴+x<۰\Rightarrow x(x^۳+۱)<۰$$

با توجه به جدول تعیین علامت، مجموعه جواب به صورت $-۱<x<۰$ است.

x		-۱		۰	
$x(x^۳+۱)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

بررسی گزینه‌ها:

۱) می‌دانیم اگر $0 < x < 1$، آن‌گاه $\sqrt[5]{x} > \sqrt[7]{x}$. پس اگر $-1 < x < 0$، خواهیم داشت $\sqrt[5]{x} < \sqrt[7]{x}$، یعنی گزینه‌ی (۱) صحیح نیست.

۲) در نامعادله‌ی $x^2\sqrt[3]{x} > \sqrt[3]{x^2}$ سمت چپ منفی و سمت راست مثبت است، پس نادرست می‌باشد.

۳) به کمک روابط بازگشتی، درستی آن را ثابت می‌کنیم:

$$x|x| > x\sqrt[3]{x^2} \xrightarrow{x<0} |x| < \sqrt[3]{x^2} \Leftrightarrow |x| < |x|^{\frac{2}{3}}$$

با توجه به این‌که $-1 < x < 0$ است، این نامساوی بدیهی می‌باشد.

۴) صحیح نیست، زیرا:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow x^2 > x^4 \Rightarrow \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x^4}$$

۱۹۴ ۲

$$\left.\begin{array}{l} x < 2 - y \Rightarrow x^3 < 8 - 12y + 6y^2 - y^3 \\ 6y^2 < x^3 + y^3 + 4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع}} x^3 + 6y^2 < 8 - 12y + 6y^2 - y^3 + x^3 + y^3 + 4$$

$$\Rightarrow 0 < 12 - 12y \Rightarrow 12y < 12 \Rightarrow y < 1$$

۱۹۵ ۳ اگر تابع f صعودی اکید باشد و $a < b$، آن‌گاه $f(a) < f(b)$. با توجه به صعودی اکید بودن تابع مربوط به گزینه‌ی (۳) داریم:

$$f(x) = x^3 - x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x + 3 \xrightarrow{a>0,\Delta<0} f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ صعودی اکید است}$$

$$a < b \xrightarrow{f \text{ صعودی اکید}} a^3 - a^2 + 3a < b^3 - b^2 + 3b$$

توابع $y = x^2 - x$، $y = x^4 - 4x$ و $y = x^3 + x^2 - 3x$ غیریکنوا هستند، پس بقیه‌ی گزینه‌ها همواره صحیح نیستند.

۱۹۶ ۳

$$\left.\begin{array}{l} -a < b < 0 \Rightarrow a + b > 0 \Rightarrow 3a + 3b > 0 \\ -a < 0 \Rightarrow a > 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع}} 4a + 3b > 0$$

برای بقیه‌ی گزینه‌ها مثال نقض می‌آوریم:

گزینه‌ی (۱): $a = 3$ و $b = -2$ گزینه‌ی (۲): $a = 3$ و $b = -2$ گزینه‌ی (۴): $a = 2/5$ و $b = -2$

۱۹۷ ۴ طبق نامساوی مثلثی داریم:

$$||x| - |y|| \le |x \pm y| \le |x| + |y|$$

بنابراین $\min\{|x+y|, |x-y|\} = ||x| - |y||$ می‌باشد.

۱۹۸ ۱

$$\big||x| - 1\big| + \big|3 - 2|x|\big| > \big|3|x| - 4\big|$$

با در نظر گرفتن $a = |x| - 1$، $b = 3 - 2|x|$ و $a - b = 3|x| - 4$ می‌توان گفت $|a| + |b| > |a - b|$. پس باید $ab > 0$ باشد. در نتیجه:

$$P(x) = (|x| - 1)(3 - 2|x|) > 0$$

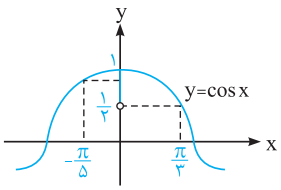
x		$-\frac{3}{2}$		-1		1		$\frac{3}{2}$	
$P(x)$	$-$	○	$+$	○	$-$	○	$+$	○	$-$

پس جواب اجتماع دو بازه‌ی $(1, \frac{3}{2})$ و $(-\frac{3}{2}, -1)$ است که طول هر یک برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد.

۱۹۹ ۳ ابتدا کسر را تفکیک می‌کنیم:

$$\frac{2\cos x + 3}{\cos x + 1} = \frac{2\cos x + 2 + 1}{\cos x + 1} = 2 + \frac{1}{\cos x + 1}$$

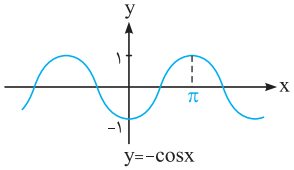
با توجه به نمودار $y = \cos x$ اگر $-\frac{\pi}{5} < x < \frac{\pi}{3}$ آن‌گاه $\frac{1}{2} < \cos x \le 1$ می‌شود.

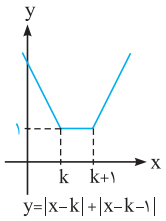


$$\frac{1}{2} < \cos x \le 1 \Rightarrow \frac{3}{2} < \cos x + 1 \le 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{\cos x + 1} < \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} \le 2 + \frac{1}{\cos x + 1} < \frac{8}{3} \Rightarrow \min k = \max\left\{\left|\frac{5}{2}\right|, \left|\frac{8}{3}\right|\right\} = \frac{8}{3}$$

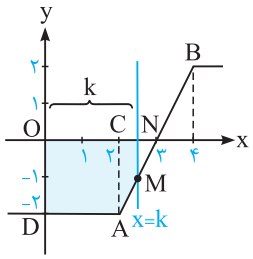
۲۰۰ ۴ برای بررسی ریشه‌های معادله‌ی $|x-k| + |x-k-1| = -\cos x$ ابتدا دو تابع $y = -\cos x$ و $y = |x-k| + |x-k-1|$ را رسم می‌کنیم:





برای این‌که دو تابع فقط در یک نقطه مشترک باشند، باید $k \le \pi \le k + 1$. بنابراین $k \ge \pi - 1$، یعنی $\min k = \pi - 1$.

۲۰۱ ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم. چون $۴ < \frac{۱۹}{۴} < ۵$ (مساحت مستطیل ADOC، ۴ و مساحت مستطیل ADOC و مثلث ACN با هم، ۵ است)، بنابراین خط $x = k$ باید طوری باشد که سطح محصور شده شامل یک مستطیل و یک ذوزنقه باشد، پس $۲ < k < ۳$ است.



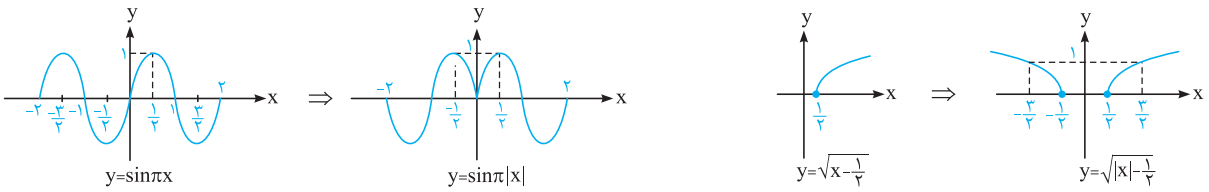
$$۲ < x < ۴ \Rightarrow y = x - ۲ + x - ۴ \Rightarrow y = ۲x - ۶ \xrightarrow{x=k} MN = |۲k - ۶| = ۶ - ۲k$$: معادله‌ی خط AB

$$\text{مساحت ذوزنقه AMNC} = \frac{۱۹}{۴} - \text{مساحت مستطیل} = \frac{۱۹}{۴} - ۴ = \frac{۳}{۴}$$

$$\text{مساحت ذوزنقه AMNC} = (MN + AC) \times \frac{NC}{۲} = (۶ - ۲k + ۲)\frac{(k-۲)}{۲} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow (۸ - ۲k)(k-۲) = \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow -۲k^۲ + ۱۲k - \frac{۳۵}{۲} = ۰ \Rightarrow k = \frac{۵}{۲}, k = \frac{۷}{۲} \text{ (غ‌ق‌ق)}$$

۲۰۲ دو تابع $y = \sqrt{|x| - \frac{۱}{۲}}$ و $y = \sin(\pi|x|)$ را رسم می‌کنیم:



این دو منحنی همدیگر را در دو نقطه با طول‌های قرینه قطع می‌کنند (هر دو منحنی توابعی زوج هستند)، پس مجموع ریشه‌ها صفر می‌شود.

نیم‌نگاه

اگر معادله‌ای زوج باشد، آن‌گاه در صورت وجود ریشه، مجموع ریشه‌ها همواره صفر است.

ممکنه بپرسین؛ چرا از همون اول نگفتیم، حالا که زوجه، پس جواب صفر می‌شه؟ جواب اینه که شاید اصلاً ریشه نداشته باشه (گزینه یک)، پس اول باید به کمک شکل مطمئن بشیم که ریشه وجود داره.

۲۰۳ بازه‌ی متقارن به شعاع یک : $(x_۱, x_۲) \Rightarrow x_۲ - x_۱ = ۲$

پس باید معادله‌ی $ax^۲ + x + ۱ = ۰$ دارای دو ریشه‌ی $x_۱$ و $x_۲$ باشد و از طرفی باید $a < ۰$ باشد تا بین این دو ریشه جواب نامعادله گردد. در این معادله تفاضل دو ریشه برابر ۲ می‌باشد پس:

$$|x_۲ - x_۱| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = ۲ \Rightarrow \frac{\sqrt{۱ - ۴a}}{|a|} = ۲ \Rightarrow \sqrt{۱ - ۴a} = ۲|a| \Rightarrow ۱ - ۴a = ۴a^۲$$

$$\Rightarrow ۴a^۲ + ۴a - ۱ = ۰ \Rightarrow a_۱ = \frac{-۲ - \sqrt{۸}}{۴} = \frac{-\sqrt{۲} - ۱}{۲}, \; a_۲ = \frac{-۲ + \sqrt{۸}}{۴} = \frac{\sqrt{۲} - ۱}{۲}$$

چون $a < ۰$ می‌باشد، بنابراین جواب برابر با $\frac{-\sqrt{۲} - ۱}{۲}$ است.

۲۰۴ **۱**

$$x^۲ + ۲x < |x+۱| \Rightarrow (x+۱)^۲ - ۱ < |x+۱| \xrightarrow{|f|^۲ = f^۲} |x+۱|^۲ - ۱ < |x+۱| \Rightarrow |x+۱|^۲ - |x+۱| - ۱ < ۰ \xrightarrow{u = |x+۱|} u^۲ - u - ۱ < ۰$$

$$\left(u^۲ - u - ۱ = ۰ \Rightarrow u = \frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}\right) \Rightarrow \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲} < u < \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \underbrace{\frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}}_{\text{بدیهی است}} < |x+۱| < \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$$

پس جواب نامعادله $|x+۱| < \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$ است که معرف همسایگی متقارن به مرکز ۱- و شعاع $\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$ می‌باشد.

$$\alpha = -۱, \; \beta = \frac{\sqrt{۵} + ۱}{۲} \Rightarrow ۲\beta + \alpha = \sqrt{۵}$$

۲۰۵ **۳** بزرگ‌ترین عدد صحیحی که از $f(x)$ بیشتر نیست، برابر است با $[f(x)]$.

بنابراین منظور از صورت سؤال، پیدا کردن $[۲x - [x]]$ است. با توجه به تساوی $[x + k] \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} [x] + k$ داریم:

$$[۲x - \underbrace{[x]}_{\text{عدد صحیح}}] = [۲x] - [x] = \left([x] + \left[x + \frac{۱}{۲}\right]\right) - [x] = \left[x + \frac{۱}{۲}\right]$$

۲۰۶ **۳** اگر جزء اعشار x را P درنظر بگیریم، آن‌گاه:

$$x = [x] + P \Rightarrow x - [x] = P \quad (۰ \le P < ۱)$$

$$[۵x] = ۵[x] + ۲ \Rightarrow [۵([x] + P)] = ۵[x] + ۲ \Rightarrow ۵[x] + [۵P] = ۵[x] + ۲$$

$$\Rightarrow [۵P] = ۲ \Rightarrow ۲ \le ۵P < ۳ \Rightarrow \frac{۲}{۵} \le P < \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{۲}{۵} \le x - [x] < \frac{۳}{۵}$$