
ریاضی خور دهم
قسمت سوم
آموزش ریاضی دهم با بیانی ساده و روان
حسین ایزن


I Math

ریاضی دهم

(نسخه دست نویس- بخش سوم)

- ✓ موشکافی مسائل کتاب درسی

حسین ایزن

مقدمه

به لطف خدا نوشتن قسمت اول کار جدید من یعنی "ریاضی خور دهم" هم تموم شد مثل کتاب قبلی یعنی ریاضی خور یازدهم قصد دارم نسخه اولیه این کتاب رو به صورت دست نویس منتشر کنم هر چند کیفیت اسکن اونطور که می خواستم نشد ولی مطمئن باشید که از خوندن کتاب لذت می برید.

در مورد سبک نوشتن کتاب هم باید خدمتتون عرض کنم که حتی الامکان سعی کردم چهارچوب های کتاب درسی رو رعایت کنم یعنی اول از همه تمرین ها و مسائل کتاب درسی رو با هم بررسی می کنیم و در پایان هر درس هم مسائل تکمیلی رو قرار دادم که مخصوص بچه های زرنگ تر هست.مثل همیشه سعی کردم که حاصل کارم کم اشتباه از آب در بیاد امیدوارم این تلاش مورد قبول دانش آموزان سرزمینم و دبیران عزیز قرار بگیره. مشتاقانه پذیرای نظرات ارزشمند همه عزیزان هستم.

در آخر لازمه تشکر ویژه ای داشته باشم از مدیران محترم سایت های پی سی دانلود ، کنکور (http://konkur.in)، ریاضی سرا (http://riazisara.ir)، کنکوریو (http://konkuru.ir)، پارس بوک (www.parsbook.org)، کتابناک (http://ketabnak.com) و ... که زحمت انتشار کتابهای قبلی من رو بر عهده گرفتن.

و اما روشهای ارتباط:

کانال تلگرام ریاضی خور @riazikhor

SMS: 0938 572 5274

وبلاگ انتگرال خور: integralkhor.blogfa.com

ایمیل انتگرال خور: integralkhor@gmail.com

حسین ایزن

آبادان – ۲۸ شهریور ۱۳۹۶

چون دوستان زیادی از من در مورد کتابهام سوال می کنن خدمتتون بگم که فعلا این چهار کتاب از من چاپ شده که در زیر عکسشون رو ملاحظه می کنید و برای تهیه این کتابها کافیه به کتابفروشی های معتبر شهر خودتون مراجعه نکنید !! چون همشون به صورت رایگان در اینترنت در دسترس همه هستن. (بگذریم که عده ای این کتابها رو به اسم خودشون به ملت می فروشن!!)

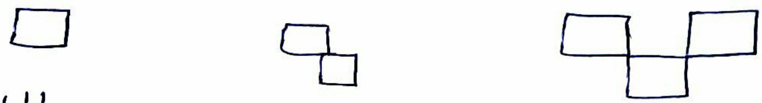
اولین کتابم انتگرال خور (جلد اول) هستش که حدود پنج سال پیش منتشر شده و در مورد انتگرال نامعین هست و بیشتر به کار دانش جوها میخوره البته دانش آموزای زرنگ و علاقمند هم چیزهای جالبی توی این کتاب پیدا می کنن. این کتاب علاوه بر ایران در افغانستان هم طرفدارای زیادی داره!

روشهای عدم موفقیت در کنکور اسم دومین کتاب من هست که چند ماهیه منتشر شده و البته به معروفیت انتگرال خور نیست. این کتاب در اصل برای دانش آموزای دبیرستانی که قصد شرکت در کنکور سراسری رو دارن نوشته شده و حاصل تجربیات من در زمینه کنکور هست. این کتاب به زبان طنز نوشته شده و میتونه واسه دانش جوهایی که میخوان کنکور ارشد بدن و کلا واسه کسایی که دنبال شیوه های مناسب مطالعه هستن مفید باشه.

سومین کتاب من اسمش دنباله خور هست این کتاب در مورد دنبا له های حسابی و هندسی صحبت می کنه و برای دانش آموزای دبیرستانی و داوطلبان کنکور نوشته شده.	
و اما چهارمین و جدیدترین کتابم اسمش هست ریاضی خور یازدهم (تجربی) به سبک آبادانی! یه کتاب جذاب و متفاوت برای بچه های سال یازدهم تجربی که به صورت دستنویس هست و تا الان شش قسمت از اون منتشر شده و انتشارش ادامه داره	

سلام دوباره به همهٔ بچه‌های گل و بلبل!

به امید خدا بریم سراغ درس سوم از فصل اول ریاضی خودمون دهم. در این درس با مفهوم الگو و دنباله آشنا می‌شیم. قبل از تعریف کردن الگو به شکل زیر دقت کنید



(۱) (۲) (۳)

همونطور که می‌بینید در شکل اول یک مربع، در شکل دوم ۲ مربع و در شکل سوم ۳ مربع وجود داره و اگر این تصاویر با همین نظم و ترتیب ادامه پیدا کنن انتظار داریم که در شکل دهم ۱۰ مربع و در شکل بیستم ۲۰ مربع داشته باشیم به این اشکال که با نظم خاصی ادامه پیدا می‌کنن اصطلاحاً یک الگو می‌گوییم.

به قول کتاب درسی:

الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، اعداد و ... است که ممکن است تکرار شونده، رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشد.

اگر یک الگو به صورت ترکیبی از اشکال هندسی (دایره، مربع، مثلث ...) باشه به آن الگوی هندسی می‌گیم (مثل مربع‌های گفته شده)

ولی اگر الگو به صورت ترکیبی از اعداد باشه به اون الگوی عددی می‌گیم مثلاً

۱ و ۶ و ۱۱ و ۱۶ و ۲۱ و ...

یک الگوی عددی است که در اول به هر عدد ۵ تا اضافه میشه تا
عدد بعدی بدست بیاد.

$$1 \xrightarrow{+5} 6 \xrightarrow{+5} 11 \xrightarrow{+5} 16 \xrightarrow{+5} 21 \;,\; \ldots$$

در الگوهای عددی به هر عدد اصطلاحاً یک جمله الگو گفته می‌شود بنابراین
در الگوی بالا داریم:

جمله اول → ۱

جمله دوم → ۶

جمله سوم → ۱۱

⋮

در ریاضی برای نشان دادن جملات الگو از متغیرهای اندیس‌دار استفاده
می‌شود. منظور از متغیر اندیس‌دار یک حرف انگلیسی (a و b و ...)
است که یک عدد کوچک در پایین آن نوشته شده که شماره جمله را نشان
می‌دهد به این عدد اندیس حرف گفته می‌شود مثلاً

می‌خوانیم a اندیس چهار یا به صورت خلاصه a چهار ← $\boxed{a_4}$ → اندیس

که عدد ۴ در اینجا یعنی جمله چهارم الگو بنابراین در الگوی بالا داریم

جمله اول الگو : $a_1 = 1$

جمله دوم الگو : $a_2 = 6$

جمله سوم الگو : $a_3 = 11$

تذکر: دقت کنید شما به جای a از حروف دیگر هم می‌تونید استفاده کنید
(جدیداً استفاده از t خیلی مُد شده!)

$t_1 \rightarrow$ جملهٔ اول الگو

$t_2 \rightarrow$ جملهٔ دوم الگو

$\vdots$

مثال: در الگوی عددی زیر جملهٔ هفتم را بیابید.

۱ ، ۵ ، ۹ ، ...

حل: همونطور که می‌بینید در الگوی بالا هر جمله از اضافه کردن عدد ۴ به جملهٔ قبلی به دست میاد بنابراین

$$\underset{t_1}{1} \xrightarrow{+4} \underset{t_2}{5} \xrightarrow{+4} \underset{t_3}{9} \xrightarrow{+4} \underset{t_4}{13} \xrightarrow{+4} \underset{t_5}{17} \xrightarrow{+4} \underset{t_6}{21} \xrightarrow{+4} \underset{t_7}{25}$$

$\Rightarrow$ جملهٔ هفتم: $\boxed{t_7 = 25}$

مثال: در الگوی زیر جملهٔ ششم را بیابید

۲ ، ۴ ، ۸ ، ...

حل: اگر به مقدار دقت کنید در الگوی بالا داریم: $\Rightarrow$

جمله اول $\Rightarrow a_1 = 2^1$

جمله دوم $\Rightarrow a_2 = 2^2 = 4$

جمله سوم $\Rightarrow a_3 = 2^3 = 8$

$\vdots$

جمله ششم $\Rightarrow a_6 = 2^6 = 64$

خب حالا اگه در الگوی بالا جمله دهم را از ما خواسته باشن سریع می‌گیم $a_{10} = 2^{10}$ یا جمله بیستم میشه $a_{20} = 2^{20}$ و ...

همونطور که متوجه شدید فرمول کلی الگوی بالا به صورت 2^n هست که n شمارهٔ جمله می‌باشه. به این فرمول کلی اصطلاحاً جمله عمومی الگو گفته می‌شود و آن را با a_n نشان می‌دهیم. بنابراین در الگوی بالا

$$\boxed{\text{جمله عمومی} \qquad a_n = 2^n}$$

با داشتن جمله عمومی الگو می‌تونیم خیلی راحت همهٔ جملات الگو رو بنویسیم فقط کافیه $n=1$ قرار بدیم تا جمله اول بدست بیاد، $n=2$ قرار بدیم تا جمله دوم بدست بیاد و همین طور تا آخر ...

$n=1 \Rightarrow a_1 = 2^1 = 2$

$n=2 \Rightarrow a_2 = 2^2 = 4$

$n=3 \Rightarrow a_3 = 2^3 = 8$

...

مثال: اگر جمله عمومی یک الگو بصورت $t_n = ۵n+۳$ باشد چهار جمله نخست آن را بنویسید

حل: به سؤال آسون واسه دست گرمی!

جمله اول	$n=۱ \Rightarrow t_۱ = ۵(۱)+۳ = ۸$
جمله دوم	$n=۲ \Rightarrow t_۲ = ۵(۲)+۳ = ۱۳$
جمله سوم	$n=۳ \Rightarrow t_۳ = ۵(۳)+۳ = ۱۸$
جمله چهارم	$n=۴ \Rightarrow t_۴ = ۵(۴)+۳ = ۲۳$

مثال: اگر جمله عمومی یک الگو به صورت $a_n = ۳n+۲$ باشد جمله سیزدهم الگو چقدر است؟

حل: این هم خیلی آسونه. وقتی میگه جملهٔ سیزدهم یعنی $n=۱۳$

$$\Rightarrow n=۱۳ \Rightarrow a_{۱۳} = ۳(۱۳)+۲ = ۴۱$$

مثال: در سؤال قبل جمله چندم برابر ۷۷ است؟

حل: اینجا یکم دقت لازمه! وقتی گفته جملهٔ چندم یعنی n رو می‌خواد

$$a_n = ۷۷ \Rightarrow n = ? \Rightarrow ۷۷ = ۳n+۲$$

$$\Rightarrow ۷۵ = ۳n \Rightarrow n = ۲۵$$

پس مواظب باشه

$$\underbrace{a_n}_{\text{مقدار جمله}} = ۳\underbrace{n}_{\text{شمارهٔ جمله}}+۲$$

الگوی خطی (درجه اول)

الگوی زیر رو در نظر بگیرید

۵ , ۷ , ۹ , ۱۱ , ۱۳ , ...

همونطور که می بینید در این الگو هر جمله دو واحد بیشتر از جمله قبلی است به عبارت دیگر اختلاف هر دو جمله متوالی برابر ۲ است به چنین الگوهایی که اختلاف هر دو جمله متوالی آن عدد ثابتی باشد الگوی خطی گفته می شود.

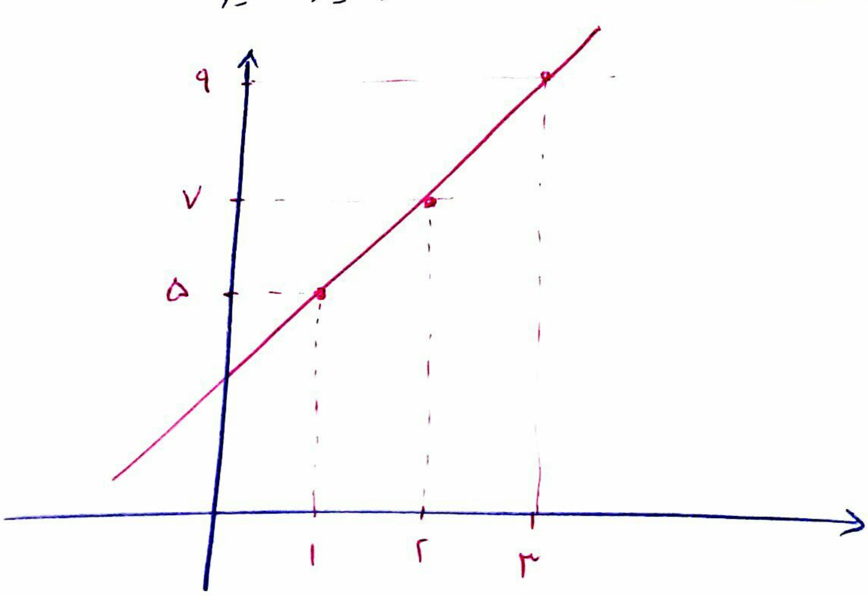
دلیل این نام گذاری هم این هست که اگر شمارهٔ جملات رو طول نقطه و مقدار جمله رو عرض نقطه در نظر بگیریم و نقاط رو روی دستگاه مختصات رسم کنیم همهٔ اونها روی یک خط قرار می گیرند مثلاً

(۱ , ۵) (۲ , ۷) (۳ , ۹)

شمارهٔ جمله — مقدار جمله

شمارهٔ جمله — مقدار جمله

حالا اگر سه نقطه بالا رو در دستگاه مختصات رسم کنیم داریم:



شیب خط حاصل برابر اختلاف جملات الگو هست که در اینجا برابر ۲ می‌باشد.

$$\overset{2}{\frown}\ \ \overset{2}{\frown}\ \ \overset{2}{\frown}\ \ \overset{2}{\frown}\ \ \overset{2}{\frown}$$

۵ , ۷ , ۹ , ۱۱ , ۱۳ , ۱۵

به طور کلی جملهٔ عمومی یک الگوی خطی به صورت $t_n = an+b$ است که a و b اعدادی ثابت هستند مثلاً

$t_n = 3n-1 \Rightarrow a=3 \quad b=-1$

$t_n = \frac{3n+3}{2} \Rightarrow a=1 \quad b=\frac{3}{2}$

نکتهٔ مهم: در جملهٔ عمومی الگوی خطی a یعنی ضریب n همان شیب خط یا اختلاف بین دو جملهٔ متوالی است.
مقدار b هم معمولاً با عدد گذاری مشخص می‌شود.

$\boxed{\text{اختلاف بین جملات} \longrightarrow a}$

مثال: در الگوی خطی (درجه اول) زیر جملهٔ عمومی را بیابید

۵ , ۷ , ۹ , ۱۱ , ۱۳ , ــــ

حل: چون الگو خطی است جملهٔ عمومی آن به صورت $t_n = an+b$ است در اینجا $a=2$ می‌باشد (اختلاف بین دو جملهٔ متوالی) پس $t_n = 2n+b$ برای پیدا کردن b کافیه $n=1$ قرار بدیم

جملهٔ اول: $t_1 = 5 \Rightarrow t_1 = 2(1)+b = 5 \Rightarrow b=3$

$\Rightarrow \boxed{t_n = 2n+3}$

مثال: در الگوی خطی با جمله عمومی $t_n = 3n-1$ جمله هفتم چقدر از جمله پنجم بزرگتر است؟

حل: یه سؤال ساده اما جالب!

روش اول: یه روش خیلی ساده این هست که جملات هفتم و پنجم رو حساب کرده و از هم کم کنیم

$$n=5 \Rightarrow t_5 = 3(5)-1 = 14$$

$$n=7 \Rightarrow t_7 = 3(7)-1 = 20$$

$$\Rightarrow t_7 - t_5 = 20-14 = 6$$

روش دوم: یه روش هوشمندانه توجه به این نکته هست که در جمله عمومی $t_n = 3n-1$ ضریب n یعنی عدد 3 اختلاف بین دو جمله متوالی هست بنابراین

$$t_5 \xrightarrow{+3} t_6 \xrightarrow{+3} t_7$$

به عبارت دیگه t_7 به اندازهٔ 6 واحد از t_5 بزرگتر است (2 تا 3 واحد)

بنابراین

$$\boxed{t_7 - t_5 = 6}$$

مثال: در یک الگوی خطی جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می باشد جمله عمومی الگو را بیابید.

حل: یه سؤال جالب و مهم!

روش اول: فرض کنید جمله عمومی به صورت $t_n=an+b$ باشد

طبق داده های مسئله داریم:

$$n=4 \Rightarrow t_4=17$$
$$n=10 \Rightarrow t_{10}=41$$

بنابراین:

$$t_4=17 \Rightarrow a(4)+b=17$$
$$t_{10}=41 \Rightarrow a(10)+b=41$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 4a+b=17 \\ 10a+b=41 \end{cases}$$

با حل دستگاه دو معادله دو مجهول بالا داریم:

$$\boxed{a=4 \quad , \quad b=1}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_n=4n+1}$$

روش دوم: جملات چهارم و دهم رو به ترتیب با t_4 و t_{10} نشون می دیم که داریم

دقت کنید که اختلاف بین جملات برابر ضریب n یعنی a هست.

$$t_4 \xrightarrow{a} t_5 \xrightarrow{a} t_6 \xrightarrow{a} t_7 \xrightarrow{a} t_8 \xrightarrow{a} t_9 \xrightarrow{a} t_{10}$$

$$\Rightarrow t_{10}-t_4=6a \Rightarrow 41-17=6a \Rightarrow 6a=24 \Rightarrow a=4$$

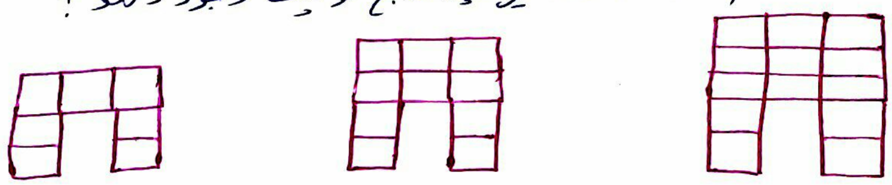
$$t_n=4n+b \Rightarrow t_4=4(4)+b=17 \Rightarrow b=1$$

$$\Rightarrow \boxed{t_n=4n+1}$$

الگوی هندسی

در کتاب های ریاضی جدید متوسطه تأکید زیادی روی الگوهای هندسی شده همانطور که در ابتدای درس دیدید منظور از الگوی هندسی یکسری از اشکال هندسی هست که با نظم خاصی تکرار میشن و معمولاً در مسائل از ما خواسته میشه که جمله عمومی الگو رو بدست بیاریم یا اینکه بگوییم مثلاً در شکل دهم چند مربع وجود داره. خب بدون معطلی بریم سراغ اولین مثال.

مثال: در شکل هشتم از الگوی زیر چند مربع کوچک وجود دارد؟



(۱) (۲) (۳)

حل: روش اول: روش فرمولی

در روش فرمولی کافیه که ما جملهٔ عمومی الگوی بالا رو بدست بیاریم و در آخر در جملهٔ عمومی $n=۸$ قرار بدیم تا جواب مسئله بدست بیاد.

اول از همه تعداد مربع های کوچک را در هر شکل می نویسیم:

شکل اول ← $t_1 = ۷$

شکل دوم ← $t_2 = ۱۰$

شکل سوم ← $t_3 = ۱۳$

چون در اینجا اختلاف بین جمله های متوالی الگو عدد ثابتی هست (عدد ۳) بنابراین در اینجا یک الگوی خطی داریم. اگر یادتون باشه گفتیم که جمله عمومی الگوی خطی به صورت $t_n = an+b$ هست که a یعنی ضریب n برابر اختلاف بین دو جمله الگو هست که در اینجا برابر ۳ هست ←

پس جمله عمومی به صورت $t_n = 3n+b$ درمیاد.

حالا مقدار مونه حساب؛ b که کافیه $n=1$ قرار بدیم تا b بدست بیاد

$$n=1 \Rightarrow t_1 = 7$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = 3(1)+b = 7 \quad \Rightarrow \quad b=4$$

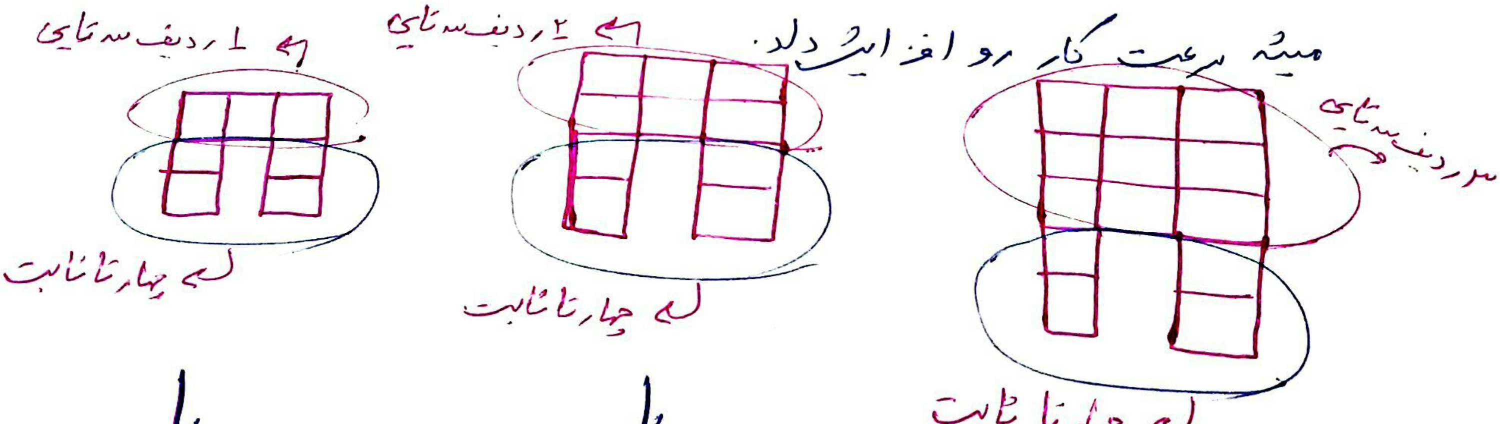
بنابراین جمله عمومی الگو میشه:

$$t_n = 3n+4$$

حالا کافیه در جمله عمومی $n=8$ قرار بدیم تا تعداد مربعات در شکل هشتم یعنی t_8 بدست بیاد

$$n=8 \Rightarrow t_8 = 3(8)+4 = 28$$

روش دوم: روش مشاهده ای: در این روش شما می‌تونید با مشاهده و دقت در شکل خیلی سریع‌تر از روش فرمولی به جواب برسید البته ممکنه این روش برای برخی از اشکال و الگوهای هندسی یه مقدار سخت باشه اما با تکرار و تمرین میشه سرعت کار رو افزایش داد.

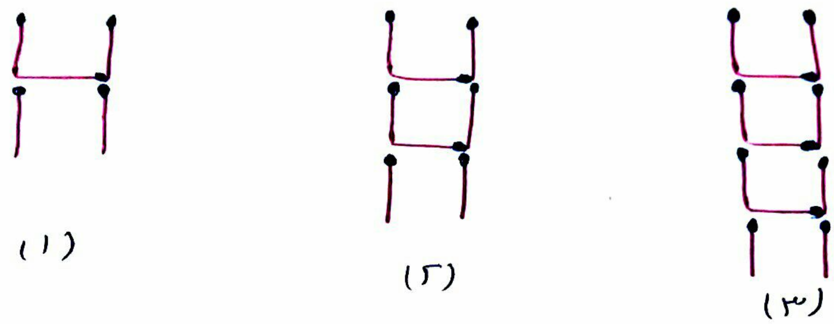


$$t_1 = 3(1)+4 \qquad t_2 = 3(2)+4 \qquad t_3 = 3(3)+4$$

بنابراین در شکل هشتم ۸ ردیف ۳ تایی به علاوه ۴ مربع ثابت داریم یعنی

$$\Rightarrow \quad t_8 = 3(8)+4 = 28$$

مثال در شکل هفتم از الگوی زیر چند چوب کبریت وجود دارد؟



حل : روش فرمولی :

قدم اول : ابتدا تعداد کبریت‌ها در هر شکل رو می‌نویسیم :

شکل اول $\Rightarrow n=1 \Rightarrow t_1 = 5$

شکل دوم $\Rightarrow n=2 \Rightarrow t_2 = 8$

شکل سوم $\Rightarrow n=3 \Rightarrow t_3 = 11$

چون اختلاف بین جملات متوالی عدد ثابتی هست پس الگوی ما خطی است.

قدم دوم : محاسبه‌ی جمله‌ی عمومی

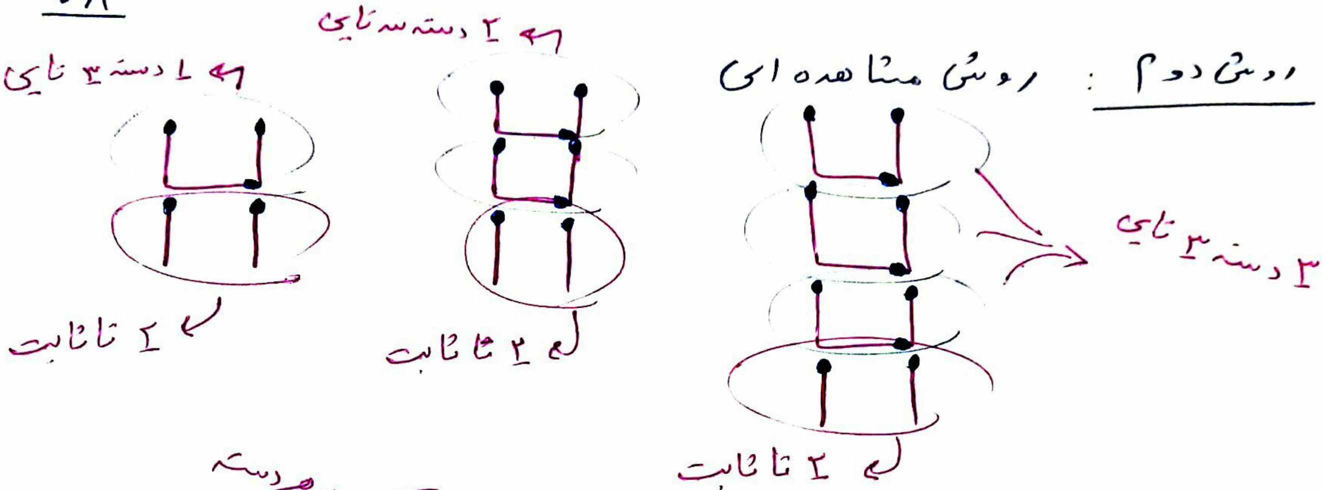
چون الگو خطی است بنابراین جمله‌ی عمومی به صورت $t_n = an+b$ هست که $a=3$ (برابر اختلاف بین دو جمله متوالی) مقدار b هم با قرار دادن $n=1$ به راحتی بدست میاد

$$\Rightarrow t_n = 3n+b \qquad n=1 \rightarrow t_1 = 5$$

$$\Rightarrow 5 = 3(1)+b \Rightarrow \boxed{b=2} \Rightarrow \boxed{t_n = 3n+2}$$

شکل هفتم $\Rightarrow n=7 \Rightarrow t_7 = 3(7)+2 = \boxed{23}$

روش دوم : روش مشاهده ای



تعداد کبریت در هر دسته

کبریت های ثابت

$n=1 \Rightarrow t_1 = 3(1)+2$

$n=2 \Rightarrow t_2 = 3(2)+2$

$n=3 \Rightarrow t_3 = 3(3)+2$

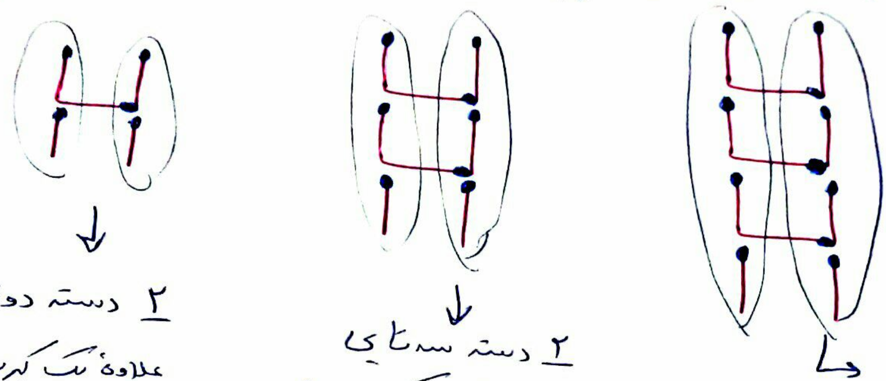
بنابراین با توجه به روند بالا در شکل هفتم داریم :

$\Rightarrow n=7 \Rightarrow t_7 = 3(7)+2 = 23$

نکته مهم : در روش مشاهده‌ای دسته‌بندی رو میشه از روش‌های مختلفی انجام داد که معمولاً یک روش ساده تر از بقیه هست.

در مسائل بعدی سعی می‌کنیم با روش‌های مختلف دسته‌بندی آشنا بشیم. باز هم تاکید می‌کنم که روش مشاهده‌ای به خصوص برای شکل های پیچیده احتیاج به تمرین زیاد داره.

مثلاً در مثال چوب کبریتها می‌تونیم دسته بندی رو به صورت زیر انجام بدیم.



۲ دسته دوتایی به علاوه‌ی یک کبریت وسط

۲ دسته سه تایی به علاوه‌ی دو کبریت وسط

۲ دسته چهار تایی به علاوه ۳ کبریت وسط

$$n=1 \Rightarrow \quad t_1 = 2(\underbrace{2}_{n+1}) + \underbrace{1}_{n}$$

$$n=2 \Rightarrow \quad t_2 = 2(\underbrace{3}_{n+1}) + \underbrace{2}_{n}$$

$$n=3 \Rightarrow \quad t_3 = 2(\underbrace{4}_{n+1}) + \underbrace{3}_{n}$$

بنابراین طبق دسته بندی بالا الگوی کلی به صورت زیر هست

$$t_n = 2\underbrace{(n+1)} + n$$

یکی بیشتر از شماره‌ی شکل

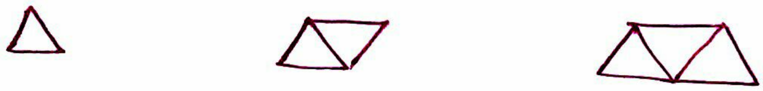
برابر شماره‌ی شکل

که با ساده سازی t_n داریم

$$t_n = 2(n+1) + n = 2n+2+n = 3n+2$$

که همون جواب قبلی هست. البته واضحه که این دسته بندی یه مقدار کار رو مشکل می‌کنه.

مثال : جمله‌ی عمومی الگوی زیر را بیابید. (تعداد پاره خطها ملاک است.)



حل : اگر بخوایم از روش مشاهده ای مسئله رو حل کنیم ممکنه با دیدن مثلث ها بگیم چون هر مثلث از ۳ پاره خط تشکیل شده تعداد پاره خطها ۳ تا ۳ تا زیاد میشن. ولی متاسفانه اینطور نیست!

بنابراین ابتدا از روش وسولی مسئله رو حل می‌کنیم تا مسئله برامون جا بیافته

قدم اول : تعداد پاره خطهای هر شکل رو می‌نویسیم :

$n=1 \Rightarrow t_1=3$

$n=2 \Rightarrow t_2=5$

$n=3 \Rightarrow t_3=7$

چون اختلاف بین جملات ثابت است پس الگو خطی هست.

قدم دوم : نوشتن جمله‌ی عمومی

در اینجا جمله عمومی به صورت $t_n=an+b$ هست که $a=2$ (چرا؟)

پس $t_n=2n+b$.

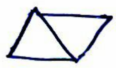
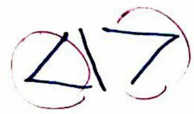
برای تعیین b کافیه حالت $n=1$ رو در نظر بگیریم

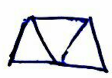
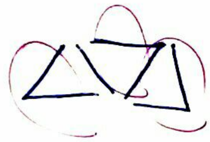
$n=1 \Rightarrow t_1=3 \Rightarrow 2(1)+b=3 \Rightarrow b=1$

$$\Rightarrow \boxed{t_n=2n+1}$$

روش مشاهده ای

 $\overset{n=1}{\Rightarrow}$  → ۱ دسته ۲ تایی
→ بعلاوه‌ی ۱ ثابت

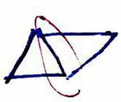
 $\overset{n=2}{\Rightarrow}$  → ۲ دسته ۲ تایی بعلاوه‌ی
۱ ثابت

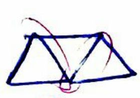
 $\overset{n=3}{\Rightarrow}$  ⇒ ۳ دسته ۲ تایی بعلاوه
۱ ثابت

بنابراین در شکل n ام n دسته ۲ تایی بعلاوه‌ی یک پاره خط ثابت داریم پس $\boxed{t_n = 2n+1}$

یه روش دیگه برای محاسبه‌ی تعداد پاره خطها در اینجا این هست که دسته بندی رو به صورت ۳ تایی انجام بدیم (چون هر مثلث ۳ ضلع داره) بعد پاره خطهای مشترک رو از حاصل کم کنیم یعنی

 $\overset{n=1}{\Rightarrow}$ ۱ دسته سه تایی - صفر مشترک → $n-1$

 $\overset{n=2}{\Rightarrow}$ ۲ دسته ۳ تایی - ۱ مشترک → $n-1$

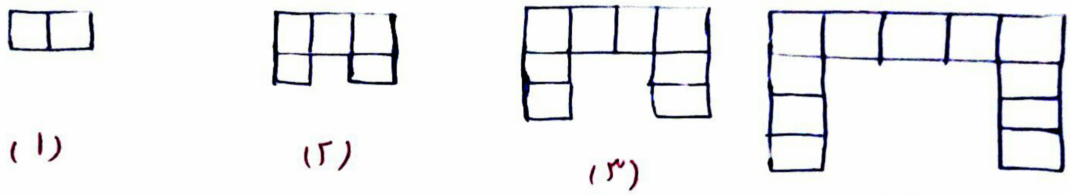
 $\overset{n=3}{\Rightarrow}$ ۳ دسته ۳ تایی - ۲ مشترک → $n-1$

پس شکل n ام دارای n دسته ۳ تایی - $(n-1)$ پاره خط مشترک هست

$$\Rightarrow t_n = 3n - (n-1) = 3n - n + 1 = 2n+1$$

$$\Rightarrow \boxed{t_n = 2n+1}$$

مثال: شکل هشتم الگوی زیر از چند مربع کوچک تشکیل شده است؟



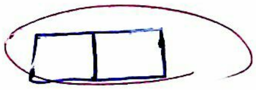
(۱) (۲) (۳) (۴)

حل: یک مسئله جالب!

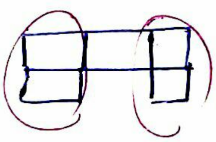
در اینجا از روش ونولی خیلی راحت میشه به جواب رسید اما شکل مسئله طوری رسم شده که اگه بخواید از روش حفظی برید به مشکل برمی‌خورید!

بنابراین اگر انتخاب دست خودتونه روش ونولی رو برید مطمئن‌تر هست که جوابش میشه: $t_n = 3n-1 \Rightarrow \boxed{t_8 = 3(8)-1 = 23}$

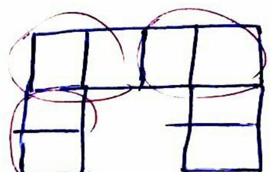
اما اگر روش مشاهده‌ای رو از شما خواستن به صورت زیر عمل می‌کنیم



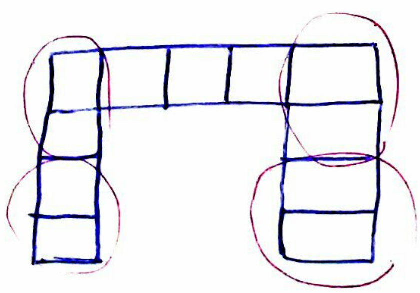
$n=1 \Rightarrow$ ۱ دسته دوتایی



$n=2 \Rightarrow$ ۲ دسته دوتایی $+1 \rightarrow n-1$



$n=3 \Rightarrow$ ۳ دسته دوتایی $+2 \rightarrow n-1$



$n=4 \Rightarrow$ ۴ دسته دوتایی $+3 \rightarrow n-1$

پس در شکل n ام ما n دسته دوتایی بعلاوه $n-1$ مربع داریم

$$\boxed{t_n = 2(n)+n-1 = 3n-1} \Rightarrow \boxed{t_8 = 23}$$

الگوهای غیر خطی

تا اینجای کار با الگوهای خطی (درجه اول) آشنا شدیم گفتیم که در یک الگوی خطی اختلاف بین دو جمله متوالی عدد ثابتی هست.

اما بسیاری از الگوهایی که با اونها روبرو میشیم (به خصوص در مواقع امتحان!) الگوهای غیر خطی هستند. این الگوها ممکنه به صورت درجه دوم، درجه سوم یا حتی توانی باشند.

حواستون باشه وقتی میگیم الگوی درجه دوم یعنی جمله عمومی الگو از درجه دوم هست مثلاً $t_n = 3n^2 - 2n + 1$ به همین صورت الگوی درجه سوم یعنی جمله عمومی الگو از درجه سوم هست.

الگوهای درجه دوم

ساده ترین نوع الگوهای غیرخطی الگوهای درجه دوم هستند که در کتاب درسی به اونها اشاره شده است. جمله عمومی یک الگوی درجه دوم به صورت کلی زیر هست:

$$\boxed{t_n = an^2 + bn + c}$$

که a و b و c اعداد ثابتی هستند.

مثال: اگر جمله عمومی الگوی درجه دوم زیر به صورت $t_n = 2n^2 + bn + c$ باشد ثابت های b و c را بیابید.

$$4 \,,\, 9 \,,\, 18 \,,\, \ldots$$

حل: در اینجا ضریب n^2 یعنی a برابر 2 داده شده و فقط ضرایب b و c از ما خواسته شده است.

$\Leftarrow$ طبق داده های مسئله داریم:

$$\begin{cases} n=1 \Rightarrow t_1=4 \\ n=2 \Rightarrow t_2=9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n=1 \quad t_1=2(1)^2+b(1)+c=4$$

$$\Rightarrow 2+b+c=4 \Rightarrow \boxed{b+c=2}$$

$$n=2 \Rightarrow t_2=2(2)^2+b(2)+c=9$$

$$\Rightarrow 8+2b+c=9 \Rightarrow \boxed{2b+c=1}$$

دستگاه $\Rightarrow \begin{cases} b+c=2 \\ 2b+c=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b=-1} \quad \boxed{c=3}$

$$\Rightarrow \boxed{t_n=2n^2-n+3}$$

جمله عمومی الگوی درجه دوم

آقا اجازه: در اینجا جمله سوم یعنی $t_3=18$ به کار نمی آید؟

استاد: سؤال خوبی پرسیدی!

در اینجا چون ۲ مجهول داریم استفاده از ۲ جمله اول و دوم برای پیدا کردن b و c کافی است. اما اگر مثلاً a هم مجهول بود می بایست از ۳ جمله استفاده کرده و دستگاه ۳ معادله ۳ مجهول می نوشتیم.

بعد از معرفی الگوهای درجه دوم دو تا سوال هم پیش میاد :

اولاً : اگر یک الگوی عددی به ما داده باشه از کجا بفهمیم که این الگو درجه دوم است ؟

دوماً : چطور می‌تونیم جمله عمومی یک الگوی درجه دوم رو پیدا کنیم ؟

و اما جواب سوال اول

زمانی یک الگوی داده شده درجه دوم است که اختلاف بین جملات آن الگو تشکیل یک الگوی خطی بدهند .

به عنوان مثال اگر به الگوی زیر توجه کنید

$$2 \xrightarrow{3} 5 \xrightarrow{5} 10 \xrightarrow{7} 17 \xrightarrow{9} 26$$

۲ و ۵ و ۱۰ و ۱۷ و ۲۶

اگر اختلاف بین هر دو جمله الگوی بالا رو به صورت یک الگوی جدید بنویسیم (اسم این الگو رو می‌ذاریم الگوی ثانویه)

الگوی ثانویه ⟵ ۳ و ۵ و ۷ و ۹

ملاحظه می‌کنیم که الگوی ثانویه بالا یک الگوی خطی هست بنابراین الگوی اصلی یک الگوی درجه دوم خواهد بود که جمله عمومی آن به صورت $t_n = an^2+bn+c$ است .

توجه : دقت کنید که اصطلاح الگوی ~~[illegible]~~ ثانویه رو ما برای راحتی خودمون به کار بردیم .

و اما پاسخ سؤال دوم یعنی پیدا کردن جملهٔ عمومی الگوی درجه دوم

برای پیدا کردن جمله عمومی یک الگوی درجه دوم روشهای مختلفی وجود داره که ما در اینجا دو روش رو با هم بررسی می‌کنیم که شما کافیه یکی از این روشها رو یاد بگیرید.

روش اول : ما این روش رو در قالب یک مثال به صورت قدم به قدم توضیح می‌دیم.

مثال : جملهٔ عمومی الگوی زیر را بیابید

۴ , ۹ , ۱۸ , ۳۱ , ...

قدم اول : تشخیص درجه دوم بودن الگوی داده شده

همونطور که گفتیم یک الگو زمانی درجه دوم است که الگوی ثانویهٔ اون خطی باشه.

$$۴ \xrightarrow{+۵} ۹ \xrightarrow{+۹} ۱۸ \xrightarrow{۱۳} ۳۱$$

الگوی ثانویه ⇐ ۵ , ۹ , ۱۳ , ... ⇐ خطی است

چون الگوی اختلاف جملات (الگوی ثانویه) خطی است بنابراین الگوی اصلی یک الگوی درجه دوم است و جمله عمومی آن به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ خواهد بود. دقت کنید که هدف ما بدست آوردن ضرایب a و b و c است.

قدم دوم : بدست آوردن جمله عمومی الگوی ثانویه و تعیین ضرایب a و b از روی آن

الگوی ثانویه $\Rightarrow$ $\overset{4}{\frown}\overset{4}{\frown}$ ۵ , ۹ , ۱۳ $\Rightarrow$ $t_n = 4n+1$

حفظش کن

در جمله‌ی عمومی الگوی ثانویه ضریب n برابر 2a و عدد ثابت برابر a+b است

$t_n = 4n+1 \longrightarrow a+b=1$

$2a=4$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a=4 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a=2 \Rightarrow b=-1$$

قدم سوم : محاسبه‌ی ضریب c با عددگذاری

الگوی اصلی $t_n = an^2+bn+c \xrightarrow{a=2,\, b=-1} t_n = 2n^2-n+c$

محاسبه‌ی c $\Rightarrow n=1 \Rightarrow t_1=4$

$\Rightarrow 2(1)^2-(1)+c=4 \Rightarrow c=3$

$$\Rightarrow \boxed{t_n = 2n^2-n+3}$$

با داشتن جمله‌ی عمومی می‌توانیم هر جمله‌ای از الگوی داده شده رو بنویسیم مثلاً

جمله دهم $\Rightarrow t_{10} = 2(10)^2-10+3 = 193$

روش دوم : حالا مثال قبل رو از روش دوم حل می‌کنیم و مراحل کار رو به صورت قدم به قدم توضیح می‌دهیم.

مثال : جمله عمومی الگوی زیر را بیابید

۴ , ۹ , ۱۸ , ۳۱ , —

قدم اول : تشخیص درجه دوم بودن الگوی داده شده (مانند روش اول)

$$۴ \xrightarrow{۵} ۹ \xrightarrow{۹} ۱۸ \xrightarrow{۱۳} ۳۱$$

الگوی ثانویه $\Rightarrow$ ۵ , ۹ , ۱۳ $\Rightarrow$ خطی است

پس الگوی اصلی درجه دوم است.

قدم دوم : نوشتن الگوی ثانویه و تعیین a از روی آن

۵ , ۹ , ۱۳ $\Rightarrow$ $\boxed{a = \frac{\text{اختلاف دو جمله}}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲}$

قدم سوم : محاسبه b و c با عددگذاری (قرار دادن $n=۱$ و $n=۲$)

$a=۲ \Rightarrow t_n = ۲n^۲ + bn + c$

$n=۱ \Rightarrow t_۱ = ۴ \Rightarrow ۲(۱)^۲ + b(۱) + c = ۴ \Rightarrow b + c = ۲$

$n=۲ \Rightarrow t_۲ = ۹ \Rightarrow ۲(۲)^۲ + b(۲) + c = ۹ \Rightarrow ۲b + c = ۱$

$$\Rightarrow \begin{cases} b + c = ۲ \\ ۲b + c = ۱ \end{cases} \Rightarrow b = -۱ \qquad c = ۳$$

$$\Rightarrow \boxed{t_n = ۲n^۲ - n + ۳}$$

دقت کنید ۲ روش بالا معادل هستند بنابراین یادگرفتن یک روش کافی است.

مثال: جمله عمومی الگوی زیر را بدست آورید.

۵ و ۱۲ و ۲۱ و ۳۲ و ...

روش اول:

قدم اول ← تشخیص درجه دوم بودن الگو

$\Rightarrow$ ۵ و ۱۲ و ۲۱ و ۳۲ $\Rightarrow$ الگوی ثانویه $\Rightarrow$ ۷ و ۹ و ۱۱ و ... خطی است

قدم دوم: نوشتن جمله عمومی الگوی ثانویه و نوشتن a و b از روی آن

$$\Rightarrow t_n = 2n+5 \Rightarrow \begin{cases} 2a=2 \\ a+b=5 \end{cases} \Rightarrow a=1 \,,\, b=4$$

قدم سوم: محاسبه ضریب c با عددگذاری

$$t_n = n^2+4n+c \qquad n=1 \Rightarrow t_1=5$$

$$\Rightarrow (1)^2+4(1)+c=5 \Rightarrow c=0$$

$$\Rightarrow \boxed{t_n = n^2+4n}$$

روش دوم: قدم اول: ← مانند روش اول

قدم دوم: نوشتن الگوی ثانویه و تعیین a

$\Rightarrow$ الگوی ثانویه $7, 9, 11 \Rightarrow a = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow t_n = n^2+bn+c$

قدم سوم: تعیین b و c با عددگذاری

$$n=1 \Rightarrow t_1=5 \Rightarrow (1)^2+b(1)+c=5$$

$$n=2 \Rightarrow t_2=12 \Rightarrow (2)^2+b(2)+c=12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+c=4 \\ 2b+c=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b=4 \quad c=0 \Rightarrow t_n = n^2+4n$$

الگوهای درجه دوم مهم

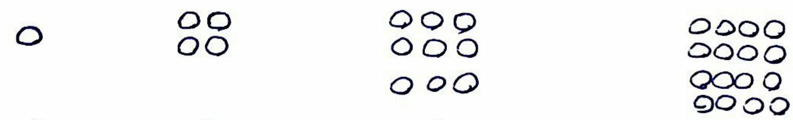
بعد از یاد گرفتن نحوهٔ بدست آوردن جمله عمومی الگوی درجه دوم بهتره که با برخی از الگوهای درجه دوم مهم آشنا بشیم که یادگیری اونها کمک زیادی به افزایش سرعت ما در حل مسائل می‌کنه.

الگوی مربعی

منظور از الگوی مربعی الگویی است که جملات آن توان دوم اعداد طبیعی هستند یعنی

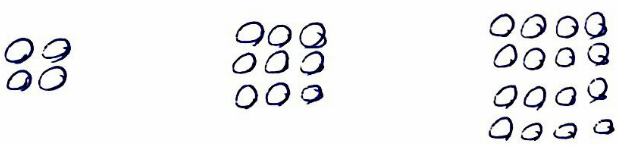
۱ و ۴ و ۹ و ۱۶ و ۲۵ و ...

جالب اینجاست که نمایش هندسی این الگو هم شکل مربعی داره



۱ ۴ ۹ ۱۶ ...

واضح هست که جمله عمومی این الگو برابر $t_n = n^2$ هست البته اگر الگو از مربع دوم یا سوم شروع بشه باید اون رو در جملهٔ عمومی لحاظ کنید مثلاً در الگوی زیر



۴ ۹ ۱۶

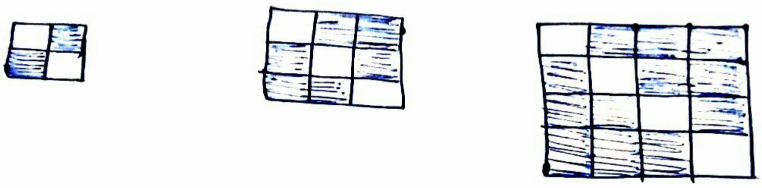
$n=1 \rightarrow 2^2$

$n=2 \rightarrow 3^2$

$n=3 \rightarrow 4^2$

$\vdots \Rightarrow t_n = (n+1)^2$ ⇐ جمله عمومی

مثال: تعداد مربع های رنگی در شکل هفتم از الگوی زیر چقدر است؟



حل:

$n=1 \Rightarrow$ تعداد مربع های رنگی $= 4-2 = 2^2-2$

$n=2 \Rightarrow$ 〃 $= 9-3 = 3^2-3$

$n=3 \Rightarrow$ 〃 $= 16-4 = 4^2-4$

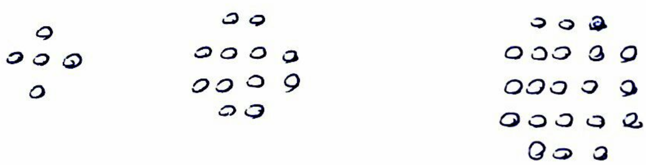
$\vdots$

شکل n ام $\Rightarrow$ 〃 $= (n+1)^2-(n+1)$

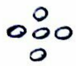
بنابراین جمله عمومی الگو یا t_n برابر است با:

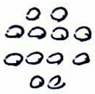
$$t_n = (n+1)^2-(n+1) = n^2+2n+1-n-1 = n^2+n$$

مثال: جمله عمومی الگوی زیر را بدست آورید.

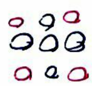
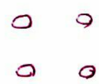


حل: این الگو یک الگوی درجه دوم هست که از روشهای گفته شده خیلی راحت می توانیم جمله عمومی اون رو بدست بیاریم. اما در اینجا می خوایم با استفاده از الگوی مربعی و روش تکمیل شکل مسئله رو حل کنیم دقت کنید ایده تکمیل شکل توی برخی از الگوهای هندسی خیلی کار رو راحت می کنه.

 ⇐ تکمیل شکل ⇐  ⇐ تبدیل به الگوی مربعی

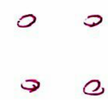
 ⇐ تکمیل شکل ⇐  ⇐ تبدیل به الگوی مربعی

همونطور که در شکل‌های بالا ملاحظه می‌کنید با اضافه کردن ۴ تا دایره به هر شکل به الگوی مربعی می‌رسیم که البته در هنگام شمارش تعداد دایره‌ها باید از هر شکل ۴ تا کم کنیم.

$n=1$ ⇐  − 

↓

$(1+2)^2 - 4$

$n=2$ ⇐  − 

↓

$(2+2)^2 - 4$

بنابراین در شکل nام ما به تعداد $(n+2)^2-4$ دایره داریم پس جملهٔ عمومی الگوی بالا به صورت زیر است.

$$\boxed{t_n = (n+2)^2 - 4 = n^2 + 4n + 4 - 4 = n^2 + 4n}$$

به عنوان تمرین خودتون جملهٔ عمومی رو از روش‌های گفته شده قبلی هم بدست بیارید.

الگوی مثلثی

به الگوی زیر دقت کنید

همونطور که می بینید الگوی بالا شکل مثلثی دارند اگر تعداد دایره ها در هر شکل رو به صورت یک الگوی عددی بنویسیم داریم :

۱ ، ۳ ، ۶ ، ۱۰ ، .....

اما اگر یه مقدار دقیق تر به شکل ها نگاه کنیم داریم :

شکل اول: $n=1 \Rightarrow \Rightarrow t_1=1$

شکل دوم: $n=2 \Rightarrow \Rightarrow t_2=1+2=3$

شکل سوم: $n=3 \Rightarrow \Rightarrow t_3=1+2+3=6$

شکل چهارم: $n=4 \Rightarrow \Rightarrow t_4=1+2+3+4=10$

به همین صورت در شکل n ام داریم :

$$\Rightarrow t_n = 1+2+3+\cdots n$$

از طرفی به راحتی میشه فهمید که الگوی مثلثی یک الگوی درجه دوم هست

و با روشهایی که گفتیم به راحتی می‌تونیم نشون بدیم که جمله عمومی دنباله مثلثی به صورت زیر هست :

$$t_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

از طرفی در صفحه قبل بدست آوردیم

$$t_n = 1+2+3+4+\cdots n$$

بنابراین با مساوی قرار دادن دو عبارت بالا داریم :

$$\boxed{1+2+3+\cdots n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

فرمول بالا که به اون مجموع اعداد طبیعی از 1 تا n گفته میشه بسیار مهم و کاربردی هست و حتماً باید توی ذهنتون باشه !

مثال : مطلوبست محاسبه مجموع های زیر

الف) $1+2+3+\cdots 10$

حل :

$$1+2+3+\cdots \underset{n}{10} = \frac{(10)(10+1)}{2} = \frac{10(11)}{2} = 55$$

$$\Rightarrow 1+2+3+\cdots 10 = 55$$

۹۵

ب) $2+4+6+\dots+2n$

حل: مجموع اعداد طبیعی زوج ، یه فرمول هم دیگه !

$$2+4+6+\dots+2n = 2[1+2+3+\dots+n] = \frac{2n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{2+4+6+\dots+2n = n(n+1)}$$

ج) $1+2+3+\dots+n+3$

$$1+2+3+\dots+n+3 = \frac{(n+3)(n+4)}{2} \qquad (n+3+1)$$

د) $1+2+3+\dots+n-1$

$$1+2+3+\dots+n-1 = \frac{(n-1)n}{2} \qquad (n-1+1)$$

ه) $1+3+5+\dots+(2n-1)$

حل: مجموع اعداد طبیعی فرد ، این هم خیلی مهمه !

$$1+3+5+7+\dots+(2n-1)$$

$$(2-1)+(4-1)+\dots+2n-1 = \underbrace{2+4+\dots+2n}_{\text{قسمت ب}} - (\underbrace{1+1+1\dots}_{n\ \text{تا}})$$

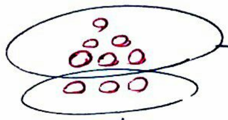
$$= n(n+1)-n = n^2 \Rightarrow \boxed{1+3+5+\dots+2n-1 = n^2}$$

مثال جملهٔ عمومی الگوی زیر را بیابید

...

حل: این مسئله رو میشه خیلی راحت از روش الگوهای درجه دوم حل کرد

اما اگر بخوایم با کمک الگوی مثلثی مسئله رو حل کنیم داریم



الگوی مثلثی از ردیف سوم $\longrightarrow 1+2+\dots+n+2=\frac{(n+2)(n+3)}{2}$

یک ردیف اضافه $\longrightarrow n+2$

بنابراین جملهٔ عمومی الگوی بالا به صورت زیر درمیاد

$$\boxed{t_n=\frac{(n+2)(n+3)}{2}+n+2}$$

اگر عبارت بالا رو ساده کنیم داریم

$$t_n=\frac{n^2+5n+6}{2}+n+2=\frac{n^2}{2}+\frac{5}{2}n+3+n+2$$

$$\Rightarrow \boxed{t_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{7}{2}n+5}$$

حالا خودتون به عنوان تمرین با اضافه کردن یک مهره به ردیف آخر شکل الگوی بالا رو به مثلثی تبدیل کنید و مسئله رو حل کنید.

یکی اضافه شده $\longrightarrow$

مثال: جمله عمومی چند الگو داده شده است در هر مورد ۴ جمله اول را بنویسید و سپس برای هر یک از آنها یک الگوی هندسی رسم کنید

الف) $t_n = 4n$

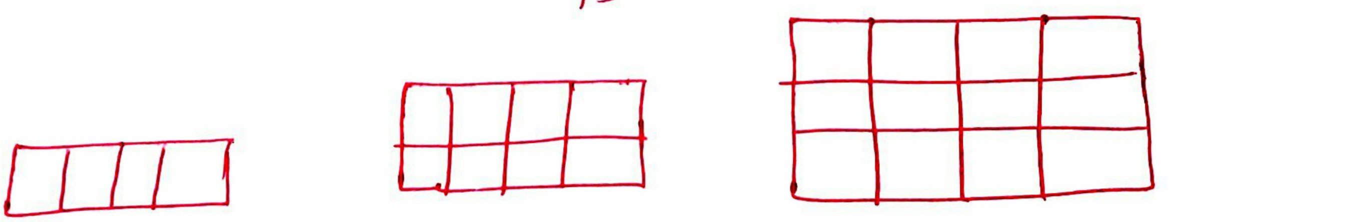
حل: یه مثال جالب! در اینجا برعکس مسائل قبل که الگوی هندسی داده شده و جمله عمومی رو می خواستند، جمله عمومی داده شده و الگوی هندسی رو از ما می خواهند.

$t_n = 4n \xrightarrow{\text{۴ جمله}}$ ۴ و ۸ و ۱۲ و ۱۶ و ...

برای الگوی هندسی $4n$ کافیه از الگوهای مربعی استفاده کنیم (تعداد اضلاع)

تعداد پاره خط = ۴   ۸   ۱۲ ...

یا اینکه از تعداد مربع ها استفاده کنیم



۴   ۸   ۱۲ ...

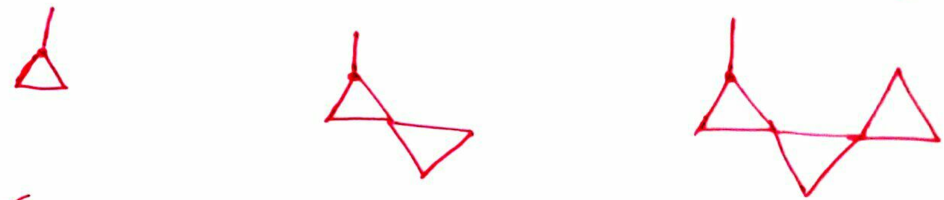
به نظر شما چه الگوهای هندسی دیگری می تونیم برای $t_n=4n$ بنویسیم؟

مثلاً با استفاده از پنج ضلعی .....

۲۸

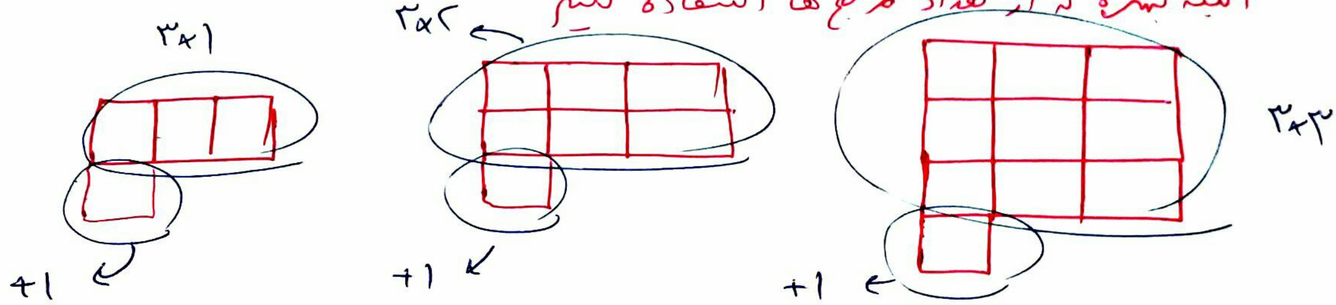
ب) $b_n = 3n+1$

حل: اگر بخوایم از تعداد اضلاع برای الگو بالاها استفاده کنیم با توجه به وجود $3n$ مثلث گزینه مطلوب هست اما توجه داشته باشید که عدد $+1$ هم باید به صورت یک ضلع اضافه در شکل لحاظ بشه.



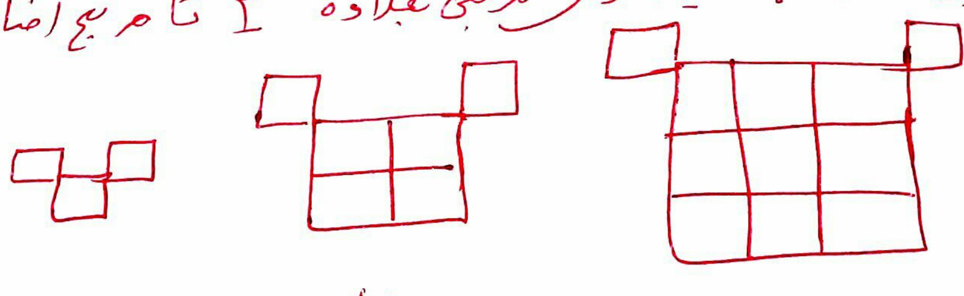
۴ ۷ ۱۰

البته بهتره که از تعداد مربع‌ها استفاده کنیم



ج) $b_n = n^2+2$

حل: این خیلی آسونه! یه الگوی مربعی بعلاوه‌ی ۲ تا مربع اضافه



۳ ۶ ۱۱

د) $t_n = n^2+n$

حل: این هم خیلی جالب هست! با یک فاکتورگیری ساده داریم:

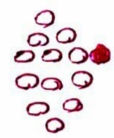
$t_n = n^2+n = n(n+1) \longrightarrow$ دو برابر الگوی مثلثی

همونطور که می بینید این الگو در واقع ۲ برابر الگوی مثلثی هست بنابراین الگوی هندسی ما به صورت زیر درمیاد:

$n=1 \Rightarrow t_1=2$

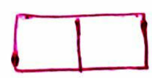
$n=2 \Rightarrow t_2=6$

$n=3 \Rightarrow t_3=12$

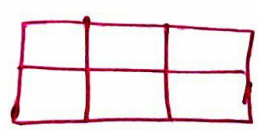


یه روش دیگه این هست که از تعداد مربع ها برای الگوی بالا استفاده کنیم

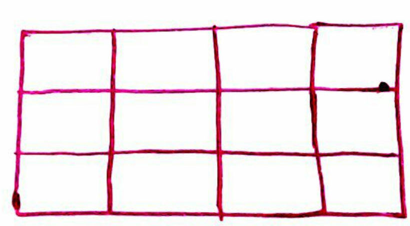
$n=1 \Rightarrow t_1=(1)(2)$



$n=2 \Rightarrow t_2=(2)(3)$



$n=3 \Rightarrow t_3=(3)(4)$



می بینید که استفاده از تعداد مربع‌ها توی خیلی از الگوها جواب میده و روش کلی تری هست.

دنباله

متاسفانه کتاب درسی مفهوم دنباله رو بعد از الگو معرفی کرده (یعنی برعکس رفته)
منظور از دنباله یکسری اعداد پشت سرهم هست که به هر عدد میگیم یه جمله دنباله مثلاً

۵ و ۲- و ۳ و ۱ و ۴ و ...

آقا اجازه: این که همون تعریف الگو هست ؟!

استاد: نه عزیزدل برادر! یه نکته ریز اینجا هست که جملات دنباله ممکنه هیچ نظمی نداشته باشه مثلاً

۱ و ۲- و ۲۵ و ۳ و ۷- و ...

به قول کتاب درسی جملات یک دنباله ممکن است فاقد الگو باشه پس می‌تونیم بگیم:

هر الگو یک دنباله است اما هر دنباله لزوماً یک الگو نیست.

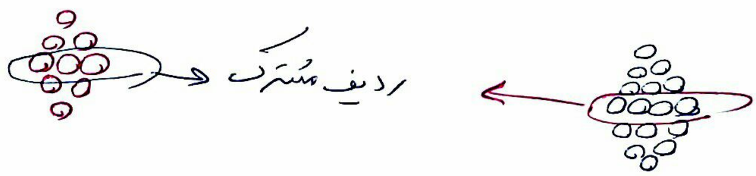
بنابراین از این به بعد می‌تونیم به جای الگو بگیم دنباله مثلاً بگیم دنباله خطی، دنباله مربعی و ...

در درس بعدی با دنباله های حسابی و هندسی آشنا می‌شیم.

سری های تکمیلی

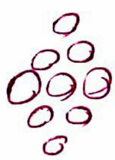
مثال ۱ : جملهٔ عمومی الگوی هندسی زیر را بیابید.

حل : روش اول : در نگاه اول در اینجا دو تا الگوی مثلثی داریم که در ردیف اول مشترک هستند که این ردیف مشترک دو بار در شمارش منظور می شود.



بنابراین می توانیم بگیم

تعداد دایره ها در هر شکل = دو برابر الگوی مثلثی − ردیف مشترک



$\Rightarrow$ $2 \times 6 - 3$

$\Rightarrow$ $2 \times 10 - 4$

ردیف nام $\Rightarrow$ $t_n = 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] - n = n(n+1) - n = n^2$

روش دوم : اگر یه مقدار شکل ها رو بچرخونید می بینید که در واقع با یک الگوی مربعی سروکار داریم !

مثال ۲ : جملهٔ عمومی دنباله زیر را بیابید عدد ۲۳۳ جملهٔ چندم دنباله است؟

۵ و ۸ و ۱۲ و ۱۷ و ...

حل : خیلی راحت میشه تشخیص داد که دنباله بالا درجه دوم است بنابراین طبق روشهای گفته شده داریم :

الگوی ثانویه $\Rightarrow$ ۳ و ۴ و ۵ و ...

جملهٔ عمومی الگوی ثانویه $\quad t_n = n + 2 \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ a + b = 2 \Rightarrow b = \frac{3}{2} \end{cases}$

جملهٔ عمومی الگوی درجه دوم $\Rightarrow \quad t_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + c$

$$n = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{3}{2}(1) + c = 5 \Rightarrow c = 3$$

$$\Rightarrow t_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 3$$

$$t_n = 233 \Rightarrow n = ? \Rightarrow \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 3 = 233$$

ضرب در ۲ $\Rightarrow \quad n^2 + 3n + 6 = 466 \Rightarrow n^2 + 3n = 460$

$$\Rightarrow n(n+3) = 460$$

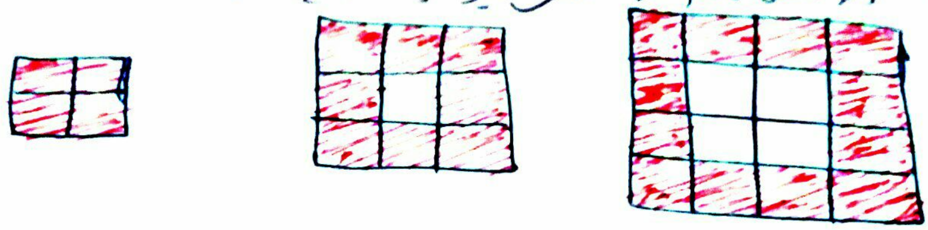
عدد ۴۶۰ رو تجزیه می کنیم

$$\Rightarrow 460 = 2^2 \times 5 \times 23 = 20 \times 23$$

$$\Rightarrow n(n+3) = 20 \times 23 \Rightarrow \boxed{n = 20}$$

جمله بیستم دنباله برابر ۲۳۳ است.

مثال ۳: در شکل دهم از الگوی زیر چند مربع رنگی وجود دارد؟



حل: با دیدن مربع ها خیلی سریع می تونیم بریم سراغ دنباله مربعی
ستره که از شکل دوم شروع کنیم

شکل دوم $n=2 \Rightarrow$ تعداد مربع های رنگی $= 9-1 = \underset{n+1}{3^2} - \underset{n-1}{1^2}$

شکل سوم $n=3 \Rightarrow$ " $= 16-4 = \underset{n+1}{4^2} - \underset{n-1}{2^2}$

شکل چهارم $n=4 \Rightarrow$ " $= 25-9 = \underset{n+1}{5^2} - \underset{n-1}{3^2}$

به همین صورت در شکل n ام داریم:

شکل n ام $\Rightarrow$ تعداد مربع های رنگی $= (n+1)^2 - (n-1)^2$

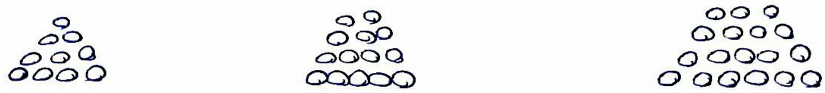
$= n^2+2n+1 - (n^2-2n+1) = 4n$

$\Rightarrow \boxed{t_n = 4n} \Rightarrow$ الگو با لا خطی است!

$\Rightarrow t_{10} = 4(10) = 40$

بنابراین برخلاف ظاهر شکل ها ما در اینجا یک الگوی خطی داریم
پس حواستون باشه گول شکل ها رو نخورید!

مثال ۲: جملهٔ عمومی دنباله زیر را بیابید.



حل: از ظاهر شکل‌ها برمیاد که با یک دنباله مثلثی سروکار داریم
اما قبل از اون شمارهٔ شکل‌ها و تعداد دایره‌ها رو می‌نویسیم

$n=1 \Rightarrow t_1 = 10$

$n=2 \Rightarrow t_2 = 14$

$n=3 \Rightarrow t_3 = 18$

همونطور که می‌بینید الگوی بالا برخلاف ظاهرش یک الگوی خطی است
بنابراین خیلی راحت می‌تونیم جمله عمومی الگو رو بنویسیم

$$\Rightarrow \boxed{t_n = 4n + 6}$$

حالا خودتون به عنوان تمرین سعی کنید مسئله بالا رو با توجه به الگوی مثلثی حل کنید

راهنمایی: از روش تکمیل شکل می‌تونید استفاده کنید.